Épreuve de Mathématiques 2

Correction

Exercice 1 (Extrait Centrale TSI 2007)

1) Pour $t \in]0, \pi/2]$, comme $\sin u \sim_0 u$, on obtient l'équivalent suivant lorsque $t \to 0$:

$$h_n(t) \sim \frac{(2n+1)t}{t} = 2n+1$$

Donc $\lim\limits_{t\to 0} h_n(t)$ existe et vaut $2n+1$: $\boxed{\text{La fonction } h_n \text{ admet un prolongement par continuité en } 0.}$

2) Comme $h_0(t) = 1$, $\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin\left((2n+3)t\right) - \sin\left((2n+1)t\right) = 2\sin(t)\cos((2n+2)t)$, donc

$$\forall \varepsilon \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \begin{aligned} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left((2n+3)t\right) - \sin\left((2n+1)t\right)}{\sin t}\,\mathrm{d}t &= \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} 2\cos((2n+2)t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin((2n+2)t)}{2n+2}\right]_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \underbrace{\frac{\sin((n+1)\pi)}{2n+2}}_{=0} - \frac{\sin((2n+2)\varepsilon)}{2n+2} \end{aligned}$$

Donc en prenant la limite pour $\varepsilon \to 0$, on trouve $\boxed{I_{n+1} - I_n = 0}$

Par conséquent la suite (I_n) est constante, et $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \frac{\pi}{2}}$

3) **a)** Effectuons un développement asymptotique en $t = 0$:

$$h(t) = \frac{1}{t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{1 - fract^26 + o(t^2)} - 1\right) = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{t^2}{6} + o(t^2) - 1\right) = \frac{t}{6} + o(t)$$

Finalement, $\boxed{\text{La fonction } h \text{ admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 : } h(t) = \frac{t}{6} + o(t)}$

b) Comme h admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, h est prolongeable par continuité en $t = 0$, par $\boxed{h(0) = 0}$, et ce prolongement est dérivable :

$$\frac{h(t) - h(0)}{t - 0} = \frac{\frac{t}{6} + o(t)}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} \boxed{\frac{1}{6} = h'(0)}$$

Vérifions que h est de classe $\mathscr{C}^1$ en 0 : pour tout $t \neq 0$, $h'(t) = \dfrac{-\cos t}{\sin^2 t} + \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{-t^2\cos t + \sin^2 t}{t^2 \sin^2 t}$.
Donc au voisinage de $t = 0$, le développement limité de la formule précédente s'écrit

$$h'(t) = \frac{-t^2 + \frac{t^4}{2} + t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4)}{t^2\sin^2 t} = \frac{\frac{t^4}{6} + o(t^4)}{t^2 \sin^2 t} \sim \frac{1}{6} = h'(0)$$

Donc h' est continue en 0. Or h est $\mathscr{C}^1$ hors de 0 comme composée de fonction $\mathscr{C}^1$.

En conclusion, $\boxed{\text{Le prolongement de } h \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right].}$

c) Comme h est $\mathscr{C}^1$, on peut effectuer une intégration par partie :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left((2n+1)t\right)h(t)\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1}h(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left((2n+1)t\right)h'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2n+1}\left(h(0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left((2n+1)t\right)h'(t)\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

Or $\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left((2n+1)t\right)h'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\left|\cos\left((2n+1)t\right)\right|}_{\leqslant 1}\ \underbrace{\left|h'(t)\right|}_{\leqslant \sup\limits_{[0,\frac{p}{i}2]}|h|}\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}\sup\limits_{[0,\frac{\pi}{2}]}|h|$

Le $\sup\limits_{[0,\frac{\pi}{2}]}|h|$ existe car h est $\mathscr{C}^1$ donc h' est continue sur le segment $[0,\pi/2]$. Donc elle est bornée et atteint ses bornes. Finalement on trouve la majoration

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left((2n+1)t\right)h(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{2n+1}\left(|h(0)| + \frac{\pi}{2}\sup_{[0,\frac{\pi}{2}]}|h|\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

En conclusion, par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left((2n+1)t\right)h(t)\,\mathrm{d}t = 0}$

d) De même que pour h_n, au voisinage de $t=0$, $g_n(t) = \dfrac{\sin\left((2n+1)t\right)}{t} \sim 2n+1$ donc la fonction g_n est prolongeable par continuité par $g_n(0) = 2n+1$.
De plus, pour tout $t \in [0,\pi 2]$, $h_n(t) - g_n(t) = \sin\left((2n+1)t\right)h(t)$ (la formule reste vraie en $t=0$).
Donc en intégrant entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, il vient

$$I_n - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left((2n+1)t\right)h(t)\,\mathrm{d}t$$

Or d'après 3)c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left((2n+1)t\right)h(t)\,\mathrm{d}t = 0$, et d'après 2) $I_n = \pi/2$.

Par conséquent $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} J_n \text{ existe et vaut } \pi/2}$

e) Si $\lim\limits_{X\to+\infty}\displaystyle\int_0^X \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ existe, alors

$$\lim_{X\to+\infty}\int_0^X \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

En posant le changement de variable $x = (2n+1)t$ (donc $\mathrm{d}x = (2n+1)\,\mathrm{d}t$), il vient

$$\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left((2n+1)t\right)}{(2n+1)t}(2n+1)\,\mathrm{d}t = J_n$$

Or d'après 3)d), $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \dfrac{\pi}{2}$. Donc

$$\boxed{\lim_{X\to+\infty}\int_0^X \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 2 (TPC 2011)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t.$$

1) a) Pour tout $t \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leqslant t \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{1+t^2}{2} \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \leqslant \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n$$

En intégrant le dernier encadrement il vient $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$. Ainsi $\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

b) D'après ci-dessus, (a_n) est décroissante minorée par 0 donc $\boxed{\text{elle converge.}}$

c) Pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ donc en multipliant par t et rajoutant 1, $\boxed{1+t^2 \leqslant 1+t}$.
En divisant par 2, élevant à la puissance n (tout est positif) puis en intégrant il vient

$$0 \leqslant a_n \leqslant \int_0^1 \left(\frac{1+t}{2}\right)^n \mathrm{d}t = \frac{1}{2^n}\left[\frac{(1+t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leqslant \frac{2}{n+1}$$

Par encadrement, $\boxed{\ell = 0}$

2) a) *Qui dit calcul explicite d'une série dit presque toujours série géométrique !* Pour tout $t \in [0,1]$:

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p = \sum_{p=0}^{n}\left(-\frac{1+t^2}{2}\right)^p = \frac{1-\left(-\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}}{1+\frac{1+t^2}{2}} = \frac{2}{3+t^2} - (-1)^{n+1}\frac{2}{3+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}$$

b) Pour tout $t \in [0,1]$, $t^2 \geqslant 0$ donc $\dfrac{2}{3+t^2} \leqslant \dfrac{2}{3}$. *(Au pire on fait une étude de la fonction $t \mapsto \dfrac{2}{3+t^2}$.)*
Ainsi

$$\int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{2}{3}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \mathrm{d}t = \frac{2}{3}a_{n+1}.$$

c) $t = \sqrt{3}\,u$ donc $\mathrm{d}t = \sqrt{3}\,\mathrm{d}u$ et, en n'oubliant pas les bornes, il vient

$$\int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2}{3+3u^2}\sqrt{3}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{Arctan}(0)\right)$$

Or $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ donc $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$

d) On va montrer que $\displaystyle\int_0^1 \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p \mathrm{d}t - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ tend vers 0. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 3)a),

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p - \frac{2}{3+t^2} = -(-1)^{n+1}\frac{2}{3+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}$$

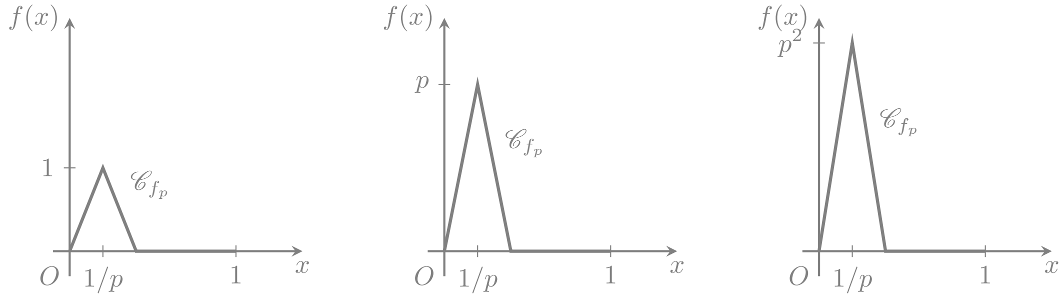
Donc en intégrant, puis majorant les valeurs absolues à l'aide de 3)b), il vient

$$\left|\int_0^1 \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1} \mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{3}a_{n+1}$$

Or d'après 1), $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Donc par majoration la limite, pour $n \to +\infty$, de l'expression entre valeurs absolue existe et vaut 0. Par conséquent, d'après 3)c)

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2}{3+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$$

Attention ! Warning ! Ce n'est pas parce que la fonction dépendant d'un paramètre (x ou p) tend vers 0 (lorsque ce paramètre bouge) que son intégrale tend vers 0. Il peut se passer n'importe quoi :
Dans chacun des cas suivants, les fonction f_p tendent vers 0. Pourtant l'aire sous la courbe ($\int_{[0,1]} f_p$) ...



$\int_{[0,1]} f_p = 1/p \to 0$ $\qquad$ $\int_{[0,1]} f_p = 1 \to 1$ $\qquad$ $\int_{[0,1]} f_p = p \to +\infty$

***On ne peut pas intervertir limite et intégrale** sans utiliser des théorèmes.*

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale *(bien vérifier que la somme est finie)*, il vient

$$\int_0^1 \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p \mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p \mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p a_p$$

Donc d'après 3)d), $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{p=0}^{n} (-1)^p a_p = \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Exercice 3 (Oral petites mines 2012)

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, fixé. La fonction f_n est $\mathscr{C}^\infty$ car polynomiale, et

$$f_n'(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1)$$

Donc le tableau de variation de f_n s'écrit :

x	0	x_n	1	y_n	$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	
f_n	1 ↘	0 ↘	$2-n$	↗ 0	↗ $+\infty$

Sur l'intervalle $]0,1[$, la fonction f_n est *strictement* décroissante, continue, et $f_n(0) = 1 > 0$ alors que $f_n(1) = 2 - n \leqslant -1 < 0$. Donc, d'après le théorème de la bijection,

$$\boxed{\text{Il existe un unique } x_n \in]0,1[\text{ tel que } f_n(x_n) = 0.}$$

De même, comme f_n est strictement croissante et continue sur $]1,+\infty[$, et que $f_n(1) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$, d'après le théorème de la bijection

$$\boxed{\text{il existe un unique } y_n \in]1,+\infty[\text{ tel que } f_n(y_n) = 0.}$$

2) Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Comme $|\varepsilon| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon^n = 0$. Par conséquent, lorsque $n \to +\infty$, $f_n(\varepsilon) \sim -n\varepsilon \to -\infty$. Ainsi, par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $f_n(\varepsilon) < 0$. En appliquant le théorème de la bijection aux f_n en question sur $]0,\varepsilon[\subset]0,1[$, il vient, par unicité de x_n,

$$0 < x_n < \varepsilon$$

Nous venons de montrer que $\forall \varepsilon \in]0,1[$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n| < \varepsilon$.
C'est-à-dire, par définition de la limite, $\boxed{(x_n) \text{ converge vers } 0}$

3) Comme $\lim x_n = 0$, à partir d'un certain rang $|x_n| < 1/2$, donc $|x_n^n| < (1/2)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0}$

Par définition, $f_n(x_n) = x_n - nx_n + 1 = 0$. Or nous venons de montrer que $x_n^n = o(1)$.
Donc $-nx_n + 1 + o(1) = 0$, puis $x_n = 1/n + o(1/n)$. En termes d'équivalents :

$$\boxed{x_n \sim \frac{1}{n}}$$

4) On procède de même pour (y_n).
Soit $\alpha \in]1, +\infty[$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^{n-1} - n = +\infty$, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\alpha) = +\infty$.
En appliquant le théorème de la bijection entre 1 et α, on trouve

$$1 < y_n < \alpha$$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} y_n \text{ existe et vaut } \ell = 1.}$

Soit $y_n = 1 + \varepsilon_n$. L'équation $f_n(y_n) = 0$ s'écrit $(1+\varepsilon_n)^n = n(1+\varepsilon_n) - 1$. En prenant les log,

$$n\ln(1+\varepsilon_n) = \ln(n) + \ln\left(1 + \varepsilon_n - \frac{1}{n}\right) = \ln(n) + o(1)$$

Car $\left(\varepsilon_n - \dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En continuant les développements limités, il vient

$$n\varepsilon_n = \ln(n) + o(1)$$

Et en conclusion $\boxed{\varepsilon_n = y_n - 1 \sim \dfrac{\ln n}{n}}$

Exercice 4 (Concours National Marocain 2008, TSI)

Partie 1 (Résultats préliminaires)

1) **a)** $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_0^y h(x+t)\,\mathrm{d}t \int_0^y h(x) + h(t)\,\mathrm{d}t = yh(x) + H(y)$.

b) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $H(x+y) - H(x) - H(y) = \displaystyle\int_x^{x+y} h(t)\,\mathrm{d}t - H(y) = \int_0^y h(x+u)\,\mathrm{d}u - H(y) = yh(x)$ d'après a), et après un changement de variable $t = x + u$.

c) Par symétrie des rôles joués par x et y, il vient $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $H(y+x) - H(y) - H(x) = xh(y)$. Donc $xh(y) = yh(x)$.

d) On applique le résultat précédent avec $x = x$ et $y = 1$. Il vient $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 \times h(x) = xh(1)$.
Il reste à vérifier qu'une fonction h de la forme $h(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{R}$ fixé, répond aux conditions de l'énoncé. Or h est linéaire [1] donc en particulier $\forall (x,y)$, $h(x+y) = h(x) + h(y)$. Par conséquent une telle fonction répond à la question.

2) **a)** F est dérivable sur I, en tant que primitive d'une fonction **continue** f, avec $F' = f$.

b) $\forall x \in J$, $F_1(x) = F(v(x)) - F(u(x))$, donc F_1 est dérivable en tant que composée de deux fonctions dérivables, avec

$$F_1'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$$

c) Si de plus u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$, alors F_1 l'est aussi, en tant que composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Rappelez-vous, les fonctions linéaires et affines !

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $u = x + t$. alors

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{a+x}^{b+x} g(u)\cos(u-x)\,\mathrm{d}u \\ &= \cos x \int_{a+x}^{b+x} g(u)\cos(u)\,\mathrm{d}u + \sin x \int_{a+x}^{b+x} g(u)\sin(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \cos x G_1(x) + \sin x G_2(x) \end{aligned}$$

où $G_1(x) = \displaystyle\int_{a+x}^{b+x} g(u)\cos(u)\,du$ et $G_2(x) = \displaystyle\int_{a+x}^{b+x} g(u)\sin(u)\,du$. D'après 2)b) on a :
$G_1'(x) = g(b+x)\cos(b+x) - g(a+x)\cos(a+x)$ et $G_2'(x) = g(b+x)\sin(b+x) - g(a+x)\sin(a+x)$.

Ainsi

$$\begin{aligned} G'(x) &= -\sin x G_1(x) + \cos x G_1'(x) + \cos x G_2(x) + \sin x G_2'(x) \\ &= \int_{a+x}^{b+x} g(u)\left[-\sin x \cos u + \cos x \sin u\right]\mathrm{d}u + \cos x\left[g(b+x)\cos(b+x) - g(a+x)\cos(a+x)\right] \\ &\quad + \sin x\left[g(b+x)\sin(b+x) - g(a+x)\sin(a+x)\right] \\ &= \int_{a+x}^{b+x} g(u)\cos(u-x)\,\mathrm{d}u + g(b+x)\left[\cos x\cos(b+x) + \sin x \sin(b+x)\right] \\ &\quad - g(a+x)\left[\cos x \cos(a+x) + \sin x \sin(b+x)\right] \\ &= \int_a^b g(x+t)\sin t\,\mathrm{d}t + g(b+x)\cos a - g(a+x)\cos a \qquad \text{(changement de variable : } t = u - x) \end{aligned}$$

Partie 2 (Étude d'une équation fonctionnelle)

1) Prenons $x = y = 0$ dans l'équation fonctionnelle, d'où $f(0)^2 = 0$, donc $f(0) = 0$.

2) **a)** Prenons $y = a$, par hypothèse $f(a) \neq 0$ donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{f(a)} \displaystyle\int_{x-a}^{x+a} f(t)\,\mathrm{d}t$.

b)

c) Soit F une primitive de f, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{f(a)}(F(x+a) - F(x-a))$.

Ainsi f est $\mathscr{C}^1$ car composée de fonctions $\mathscr{C}^1$, avec $\boxed{f'(x) = \dfrac{1}{f(a)}(f(x+a) - f(x-a)).}$

d) En déduire que f est $\mathscr{C}^1$, donc f', qui est une combinaison linéaire de translatés (sur les x) de f, est $\mathscr{C}^1$ aussi. Ainsi, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

3) Comme f est $\mathscr{C}^1$, on dérive la relation donnée en début de partie, d'abord à y fixé par rapport à x, puis à x fixé par rapport à y.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y) \quad \text{et} \quad f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y)$$

En prenant $x = 0$ dans la seconde égalité, il vient $0 = f(y) + f(-y)$. Donc $\boxed{f \text{ est impaire.}}$

4) La fonction f est $\mathscr{C}^2$ (2)c)), donc on peut dériver les deux relations ci-dessus, respectivement par rapport à x et à y.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f''(x)f(y) = f'(x+y) - f'(x-y) \quad \text{et} \quad f(x)f''(y) = f'(x+y) - f'(x-y)$$

Ainsi $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f''(x)f(y) - f(x)f''(y) = 0$. En se plaçant en $y = a$, et avec $\lambda = -\dfrac{f''(a)}{f(a)}$, on peut diviser par $f(a) \neq 0$ et il vient

$$f'' + \lambda f = 0$$

Donc $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est solution de } (\mathscr{E}_\lambda).}$

5) L'équation $(\mathscr{E}_\lambda)$ est linéaire du second ordre, le coefficient devant z'' ne s'annule pas, donc l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2.

a) **i)** La résolution de $z'' + \mu^2 z = 0$ se fait en $\alpha\cos(\mu x) + \beta\sin(\mu x)$. Donc $\boxed{(x \mapsto \cos(\mu x), x \mapsto \sin(\mu x))}$ forme une base de l'espace vectoriel des solutions de $(\mathscr{E}_\lambda)$.

ii) La fonction f est impaire, donc n'a pas de partie paire : il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f(x) = A\sin(\mu x).}$ Comme $f(a) \neq 0$, $f \neq 0$ donc $A \neq 0$.

La formule trouvée en 2)c), évaluée en 0, s'écrit

$$f''(0) = \frac{1}{f(a)}(f(a) - f(-a)) = \frac{1}{f(a)}(f(a) + f(a)) = 2$$

Donc $f''(0) = A\mu\cos(0) = 2$ donc $\boxed{A = \frac{2}{\mu}.}$

b) **i)** De même, $\boxed{(x \mapsto \operatorname{ch}(\mu x), x \mapsto \operatorname{sh}(\mu x))}$ est une base de l'espace vectoriel des solutions de $(\mathscr{E}_\lambda)$.

ii) De même la parité et le fait que $f \neq 0$ montre qu'il existe $A' \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f(x) = A' \operatorname{sh}(\mu x).}$

En regardant la dérivée, qui vaut toujours 2 en 0, on trouve $A' = \frac{2}{\mu}$.

c) L'équation s'écrit $f'' = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha x + \beta$. La parité et la valeur de la dérivée en 0 nous donne $\boxed{f(x) = 2x.}$