Épreuve de Mathématiques 2

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$ et h_n la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$h_n(t) = \frac{\sin\left((2n+1)t\right)}{\sin t}$$

1) Montrer que h_n admet un prolongement par continuité en 0.

On continuera d'appeler h_n la fonction ainsi prolongée. On pose alors

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h_n(t)\,\mathrm{d}t$$

2) Calculer I_0, puis, en calculant $I_{n+1} - I_n$, en déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Soit h la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $h(t) = \dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t}$.

a) Montrer que h admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 et calculer ce développement.

b) En déduire que h admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, que l'on continuera d'appeler h. Préciser $h(0)$ et $h'(0)$.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left((2n+1)t\right) h(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

d) Prolonger $t \mapsto \dfrac{\sin\left((2n+1)t\right)}{t}$ par continuité. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left((2n+1)t\right)}{t}\,\mathrm{d}t$. Donner $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n$.

e) On admet que $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_0^X \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ existe. Déduire des résultats précédents la valeur de cette limite.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t.$$

1) **a)** Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

b) En déduire qu'elle est convergente. On notera ℓ sa limite.

c) Justifier que pour tout $t \in [0,1]$, $1 + t^2 \leqslant 1 + t$ et en déduire que $\ell = 0$.

2) On se propose ici de calculer $\lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{n=0}^{N}(-1)^n a_n$ (On appelle cette valeur la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n a_n$).
Soit $n\in\mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $t\in[0,1]$:

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p=\frac{2}{3+t^2}-(-1)^{n+1}\frac{2}{3+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}.$$

b) Vérifier l'inégalité

$$\int_0^1\frac{2}{3+t^2}\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{n+1}\mathrm{d}t\leqslant\frac{2}{3}a_{n+1}.$$

c) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{2}{3+t^2}\,\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $t=\sqrt{3}\,u$.

d) En conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\left(\frac{1+t^2}{2}\right)^p\mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

e) Justifier l'existence et donner la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=0}^{n}(-1)^p a_p$.

Exercice 3 (Oral petites mines 2012)

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x)=x^n-nx+1$.

1) Montrer que, pour tout $n\geqslant 3$, l'équation $f_n(x)=0$ admet exactement une racine dans $]0,1[$ et une racine dans $]1,+\infty[$. On les notera x_n et y_n respectivement.

2) Montrer que, pour tout $\varepsilon\in]0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(\varepsilon)=-\infty$. En déduire que (x_n) converge vers 0.

3) Montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n^n=0$, et en déduire un équivalent de (x_n).

4) De même, déterminer la limite ℓ de (y_n), puis un équivalent de $y_n-\ell$ (on pourra poser $y_n=\ell+\alpha_n$).

Exercice 4

Les deuxparties du problème sont largement indépendantes ; seul le résultat de la question 2 de la première partie est utile pour la suite.

Partie 1 (Résultats préliminaires)

On se propose de trouver les fonction $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues telles que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ h(x+y)=h(x)+h(y)$.

1) Soit $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $h(x+y)=h(x)+h(y)$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose

$$H(x)=\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Montrer que, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_0^y h(x+t)\,\mathrm{d}t=yh(x)+H(y)$.

b) En déduire que, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $H(x+y)-H(x)-H(y)=yh(x)$.

c) Exprimer de même la quantité $xh(y)$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

d) Justifier alors que, $\forall x\in\mathbb{R}$, $h(x)=xh(1)$. Une telle fonction répond-elle à la question ?

2) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0\in I$, et $f:I\to\mathbb{R}$ continue. Pour tout $x\in I$ on pose

$$F(x)=\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

a) Justifier que F est dérivable sur I et préciser sa dérivée.

b) Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et soient $u : J \to \mathbb{R}$ et $v : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables à valeurs dans I. On pose, pour tout $x \in J$,

$$F_1(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que F_1 est dérivable sur J et préciser sa dérivée. De plus, si u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$, montrer que F_1 est aussi $\mathscr{C}^1$.

3) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, et soit (a, b) un couple de réels avec $a < b$. En effectuant un changement de variable, montrer que l'application $G : x \mapsto \displaystyle\int_a^b g(x+t)\cos t\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G'(x) = g(b+x)\cos b - g(a+x)\cos a + \int_a^b g(x+t)\sin t\,\mathrm{d}t$$

Partie 2 (Étude d'une équation fonctionnelle)

On se propose de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On suppose qu'il existe une telle fonction f, non identiquement nulle. Soit a tel que $f(a) \neq 0$.

1) Montrer que $f(0) = 0$.

2) **a)** Vérifier que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{f(a)} \displaystyle\int_{x-a}^{x+a} f(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer sa dérivée.

c) En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y) \quad \text{et} \quad f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y)$$

Quelle est nécessairement la parité de f ?

4) On pose $\lambda = -\dfrac{f''(a)}{f(a)}$. Déduire de ce qui précède que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(\mathscr{E}_\lambda) \qquad z'' + \lambda z = 0$$

5) Étude de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_\lambda)$: $\quad z'' + \lambda z = 0$.

a) On suppose $\lambda > 0$ et on pose $\mu = \sqrt{\lambda}$.

i) Donner la dimension et une base de l'espace vectoriel des solutions de $(\mathscr{E}_\lambda)$.

ii) En déduire que, dans ce cas, il existe $A \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = A\sin(\mu x)$, puis justifier que $A = \dfrac{2}{\mu}$.

b) On suppose que $\lambda < 0$ et on pose $\mu = \sqrt{-\lambda}$.

i) Donner de même une base des solutions de $(\mathscr{E}_\lambda)$.

ii) En déduire que, dans ce cas, il existe $A' \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = A'\,\mathrm{sh}\,(\mu x)$, puis justifier que $A' = \dfrac{2}{\mu}$.

c) Si $\lambda = 0$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$.

FIN DE L'ÉPREUVE