Épreuve de Mathématiques 2

Correction

Exercice 1 (Agro 2009, concours A, problème II – corrigé UPS)

La quantité $S_n(f)$ est la n-ème somme de Riemann de la fonction f sur $[0;1]$. La fonction f étant continue sur ce segment, un théorème du cours dit que

$$\boxed{\text{La suite } \big(S_n(f)\big) \text{ converge vers } \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t.}$$

1) Application

a) Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k/n)+1} = S_n(h) \qquad \text{où} \qquad \forall x \in [0;1]\,,\ h(x) = \frac{1}{1+x},$$

donc, d'après le résultat sur les sommes de Riemann rappelé à la question 0, on peut affirmer que (u_n) converge et

$$\lim u_n = \int_0^1 h(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \big[\ln|1+x|\big]_0^1 = \ln 2 - 0.$$

En conclusion,

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \ln 2.}$$

b) Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} v_n + \frac{1}{2}u_n &= \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} \\ &= \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{1}{2k'+1+2n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+2n} \qquad \begin{array}{l}\text{en posant } k = k'+n \\ \text{dans la première somme}\end{array} \\ &= \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ impair}}}^{2n-1} \frac{1}{p+2n} + \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ pair}}}^{2n-1} \frac{1}{p+2n} = \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{1}{p+2n} = u_{2n}, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n + \frac{1}{2}u_n = u_{2n}.}$$

c) La relation de la question précédente nous dit que, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = u_{2n} - \dfrac{1}{2}u_n$.
Or la suite (u_{2n}) étant extraite de (u_n), elle converge vers la même limite que (u_n), c'est-à-dire $\ln 2$. Donc (v_n) converge (comme combinaison linéaire de suites convergentes) et l'on a

$$\lim v_n = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2.$$

En conclusion,

$$\boxed{(v_n) \text{ converge bien vers } \frac{1}{2}\ln 2.}$$

2) Développement asymptotique d'une somme de Riemann

a) La fonction f étant $\mathcal{C}^\infty$, sa dérivée troisième $f^{(3)}$ est a fortiori continue sur le segment $[0;1]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes. Par conséquent,

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [0;1], \qquad |f^{(3)}(x)| \leqslant M.}$$

b) **i)** Comme nous le suggère l'énoncé, appliquons la formule de Taylor-Lagrange à la fonction f sur l'intervalle $[k/n;t]$ où elle est de classe $\mathcal{C}^3$, ce qui donne l'existence de $c \in]k/n;t[$ tel que

$$f(t) = f\Big(\frac{k}{n}\Big) + \Big(t - \frac{k}{n}\Big)f'\Big(\frac{k}{n}\Big) + \frac{1}{2}\Big(t - \frac{k}{n}\Big)^2 f''\Big(\frac{k}{n}\Big) + \frac{1}{6}\Big(t - \frac{k}{n}\Big)^3 f'''(c).$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}\Big|f(t) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \Big(t - \frac{k}{n}\Big)f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2}\Big(t - \frac{k}{n}\Big)^2 f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| &= \frac{1}{6}\Big(t - \frac{k}{n}\Big)^3 |f'''(c)| \\ &\leqslant \frac{1}{6}\Big(t - \frac{k}{n}\Big)^3 M,\end{aligned}$$

puisque $|f'''(c)| \leqslant M$ d'après le résultat de la question précédente appliqué en c (qui appartient bien à $]0;1[$ car $]k/n;t[\subset]0;1[$). En conclusion,

$$\boxed{\Big|f(t) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \Big(t - \frac{k}{n}\Big)f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2}\Big(t - \frac{k}{n}\Big)^2 f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| \leqslant \frac{M}{6}\Big(t - \frac{k}{n}\Big)^3.}$$

ii) On voit immédiatement que

$$\boxed{\text{La primitive sur } \mathbb{R} \text{ de } t \mapsto \Big(t - \frac{k}{n}\Big)^q \text{ qui s'annule en } \frac{k}{n} \text{ est } t \mapsto \frac{1}{q+1}\Big(t - \frac{k}{n}\Big)^{q+1}.}$$

iii) On a

$$\begin{aligned}&\int_{k/n}^{(k+1)/n} \Big[f(t) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \Big(t - \frac{k}{n}\Big)f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2}\Big(t - \frac{k}{n}\Big)^2 f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big] \,\mathrm{d}t \\ =\ & \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) \,\mathrm{d}t - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\int_{k/n}^{(k+1)/n} 1 \,\mathrm{d}t - f'\Big(\frac{k}{n}\Big)\int_{k/n}^{(k+1)/n} \Big(t - \frac{k}{n}\Big) \,\mathrm{d}t \\ & -\frac{1}{2}f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\int_{k/n}^{(k+1)/n} \Big(t - \frac{k}{n}\Big)^2 \,\mathrm{d}t \\ =\ & \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) \,\mathrm{d}t - f\Big(\frac{k}{n}\Big)[t]_{k/n}^{(k+1)/n} - f'\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big[\frac{1}{2}\Big(t - \frac{k}{n}\Big)^2\Big]_{k/n}^{(k+1)/n} \\ & -\frac{1}{2}f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big[\frac{1}{3}\Big(t - \frac{k}{n}\Big)^3\Big]_{k/n}^{(k+1)/n} \\ =\ & \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) \,\mathrm{d}t - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\frac{1}{n} - f'\Big(\frac{k}{n}\Big)\frac{1}{2n^2} - f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\frac{1}{6n^3},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t) \,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2n^2}f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{6n^3}f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| \\ =\ & \Big|\int_{k/n}^{(k+1)/n} \Big[f(t) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \Big(t - \frac{k}{n}\Big)f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2}\Big(t - \frac{k}{n}\Big)^2 f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big] \,\mathrm{d}t\Big| \\ \leqslant\ & \int_{k/n}^{(k+1)/n} \Big|f(t) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \Big(t - \frac{k}{n}\Big)f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2}\Big(t - \frac{k}{n}\Big)^2 f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big| \,\mathrm{d}t \\ \leqslant\ & \int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{M}{6}\Big(t - \frac{k}{n}\Big)^3 \,\mathrm{d}t \qquad \text{d'après } \alpha]\end{aligned}$$

Or

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{M}{6}\left(t-\frac{k}{n}\right)^3 \,\mathrm{d}t = \frac{M}{6}\left[\frac{1}{4}\left(t-\frac{k}{n}\right)^4\right]_{k/n}^{(k+1)/n} = \frac{M}{24n^4},$$

donc

$$\boxed{\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{6n^3}f''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{24n^4}.}$$

c) On a

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - S_n(f) - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'')\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{6n^3}\sum_{k=0}^{n-1} f''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{6n^3}f''\left(\frac{k}{n}\right)\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{6n^3}f''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M}{24n^4} \qquad \text{d'après b).}
\end{aligned}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{M}{24n^4} = n\times\frac{M}{24n^4} = \frac{M}{24n^3},$$

donc

$$\boxed{\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - S_n(f) - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'')\right| \leqslant \frac{M}{24n^3}.}$$

d) Le résultat de la question précédente nous dit que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$|\varepsilon_n| = n^2\left|S_n(f) + \frac{1}{2n}S_n(f') + \frac{1}{6n^2}S_n(f'') - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant n^2\frac{M}{24n^3} = \frac{M}{24n}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} M/(24n) = 0$, par encadrement, il vient

$$\boxed{(\varepsilon_n) \text{ converge vers } 0.}$$

On en déduit immédiatement que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'') + \frac{\varepsilon_n}{n^2},$$

et donc

$$\boxed{S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'') + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

e) Si l'on applique le résultat de la question précédente à la fonction f' (ce qui est licite puisque f' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^3$), on obtient

$$S_n(f') = \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}S_n(f'') - \frac{1}{6n^2}S_n(f''') + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Or la suite $\big(S_n(f''')\big)$ est bornée puisqu'elle converge d'après le résultat rappelé à la question 0, donc

$$\frac{1}{6n^2}S_n(f''') = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

ce qui donne

$$\boxed{S_n(f') = \int_0^1 f'(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n} S_n(f'') + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\cdot}$$

La fonction f'' étant continue, le théorème sur les sommes de Riemann (celui que l'on a utilisé à la question 0) dit que

$$S_n(f'') \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f''(t)\ \mathrm{d}t,$$

ce que l'on peut écrire

$$\boxed{S_n(f'') = \int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + o(1).}$$

f) En combinant les trois derniers résultats encadrés, on obtient

$$\begin{aligned}
S_n(f) &= \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\bigg(\int_0^1 f'(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}S_n(f'') + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\bigg) - \frac{1}{6n^2}S_n(f'') + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\\
&= \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}S_n(f'') + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\\
&= \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\bigg(\int_0^1 f''(t)\ \mathrm{d}t + o(1)\bigg) + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\\
&= \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\,\underset{.}{t} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{S_n(f) = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\ \mathrm{d}t + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\cdot}$$

3) **a)** Nous avons déjà signalé que

$$u_n = S_n(h) \qquad \text{où} \qquad \forall x \in [0;1]\,,\ h(x) = \frac{1}{1+x}\cdot$$

En appliquant le résultat de la question précédente à la fonction h, on obtient

$$\begin{aligned}
u_n &= \int_0^1 h(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 h'(t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 h''(t)\ \mathrm{d}t + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \frac{1}{2n}\big[h(t)\big]_0^1 + \frac{1}{12n^2}\big[h'(t)\big]_0^1 + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\\
&= \big[\ln|1+t|\big]_0^1 - \frac{1}{2n}\Big[\frac{1}{1+t}\Big]_0^1 + \frac{1}{12n^2}\Big[-\frac{1}{(1+t)^2}\Big]_0^1 + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\\
&= \ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{u_n = \ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\cdot}$$

b) On en déduit immédiatement que

$$u_n - \ln 2 = \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

donc

$$\boxed{u_n - \ln 2 \sim \frac{1}{4n}\cdot}$$

c) Pour tout $n \geqslant 1$, les résultats des questions 1. c) et 3. b) donnent

$$\begin{aligned} v_n &= u_{2n} - \frac{1}{2}u_n = \ln 2 + \frac{1}{8n} + \frac{1}{64n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) - \frac{1}{2}\Big(\ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{64n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \end{aligned}$$

donc

$$v_n - \frac{1}{2}\ln 2 = -\frac{1}{64n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

ce qui donne

$$\boxed{v_n - \frac{1}{2}\ln 2 \sim -\frac{1}{64n^2}.}$$

Exercice 2 (E3A 2007, PC, partiel, et EMLyon 2009)

A. Étude de la fonction f

1) Étude de f en 0.

a) $e^x - 1 = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$ donc

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \Big(\frac{x}{2}\Big)^2 + o(x^2) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)$$

.

b)
- Pour tout $x \neq 0$, $f(x) - f(0) = \dfrac{x}{e^x - 1} - 1 = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{12} + o(x^2) = o(1)$.
  Donc f est continue en 0.
- Pour tout $x \neq 0$, $f(x) - f(0) = \dfrac{x}{e^x - 1} - 1 = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{12} + o(x^2) = -\dfrac{1}{2}x + o(x)$.
  Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.
- On ne peut rien déduire de plus : la fonction $x \mapsto x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ admet un DL à l'ordre 2 en 0 mais n'est pas $\mathscr{C}^1$.

c) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ car composée de fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x - x^2}{(e^x - 1)^2} \sim \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2} = f'(0)$$

Donc f' est continue en 0, et f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

d) Équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0 : $y = 1 - \dfrac{1}{2}x$.

D'après la question A.1)a), $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{12}x^2 + o(x^2)$.

Puisque $\dfrac{1}{12}x^2 > 0$ pour tout x dans un voisinage de 0, la courbe est au-dessus de la tangente.

2) Variations de f.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$. Donc g' est du signe de x et il vient

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
signe de $g(x)$		$+$	0	$+$	

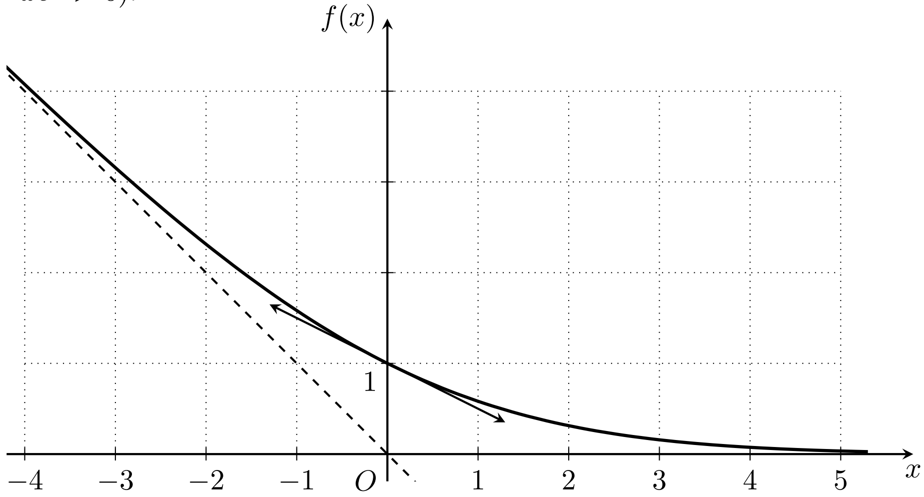
b) D'après le calcul de la question A.1)c), $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{(e^x-1)^2}$. Donc f' est du signe de $-g$ sur $\mathbb{R}^*$. De plus, d'après A.1)b), $f'(0) < 0$. En conclusion, $f' < 0$ sur $\mathbb{R}$ et f strictement décroissante.

c) Au voisinage de $+\infty$: $f(x) \sim \dfrac{x}{e^x} \to 0$ et $f > 0$ donc (C) admet une asymptote d'équation $y = 0$ et est au-dessus de celle-ci.
Au voisinage de $-\infty$: $u = e^x \to 0$ lorsque $x \to -\infty$ donc

$$f(x) = -x\left(\frac{1}{1-e^x}\right) = -x - xe^x + o(xe^x)$$

Ainsi $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$, de plus (C) admet une asymptote d'équation $y = -x$ et est au-dessus de celle-ci (car $-xe^x > 0$).

d)



B. Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f.

1) Cherchons les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(\alpha) = \alpha$.
$f(0) = 1 \neq 0$ donc $\alpha \neq 0$, et $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{e^\alpha - 1}$.

$$f(\alpha) = \alpha \iff \frac{1}{e^\alpha - 1} = 1 \iff e^\alpha = 2 \iff \alpha = \ln(2)$$

La fonction f admet don un unique point fixe, $\alpha = \ln(2)$.

2) **a)** Pour tout $x \in [0, +\infty[$, posons $\varphi(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$.
La fonction φ est $\mathscr{C}^\infty$ et $\varphi'(x) = 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x = 2(e^x - 1 - x)e^x$. En dérivant $x \mapsto e^x - 1 - x$ on montre que cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc que $e^x - 1 - x \geqslant e^0 - 1 - 0 = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
Ainsi $\varphi' \geqslant 0$ et φ est croissante, donc $\varphi(x) \geqslant \varphi(0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\forall x \in [0, +\infty[\qquad e^{2x} - 2xe^x - 1 \geqslant 0$$

(on peut aussi astucieusement factoriser par e^x, et l'expression s'étudie beaucoup plus rapidement)

b) Soit $x \in]0, +\infty[$, d'après la question précédente

$$f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2} \geqslant 0$$

c) $f'(0) = -\dfrac{1}{2} \in [-1/2, 0[$. D'après A.2)a), $f' < 0$, et d'après la question précédente, $f' \geqslant -1/2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En conclusion

$$\forall x \in [0, +\infty[\qquad -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est continue et dérivable entre u_n et α, donc l'inégalité des accroissements finis s'écrit

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant (\sup_{x \in I} |f'(x)|)|u_n - \alpha|$$

Où I est l'intervalle de bornes u_n et α. Puisque $\sup_{x \in I} |f'(x)| \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f'(x)| = \frac{1}{2}$ d'après c),

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

3) Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(n) : \quad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|1 - \alpha|$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ est vraie par hypothèse.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. Donc, d'après la question précédente, il vient

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}|1 - \alpha|$$

Et $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : $\forall n \geqslant 0 \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|1 - \alpha|$

4) $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ et la suite (u_n) converge vers $\alpha = \ln 2$.

Exercice 3 (Agro 2012, concours A, problème II – corrigé UPS)

1) Expression intégrale du terme général de la suite u

a) Soit n un entier. La formule de Taylor reste intégral s'écrit

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En prenant $x = n$, la relation ci-dessus permet d'écrire

$$1 = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} + e^{-n} \int_0^n \frac{(n-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t,$$

puis

$$\underbrace{1 - e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}}_{u_n} = \int_0^n \frac{(n-t)^n}{n!} e^{t-n} \mathrm{d}t.$$

Il suffit alors de poser $s = n - t$ (ce qui donne $\mathrm{d}s = -\mathrm{d}t$) dans l'intégrale ci-dessus pour obtenir le résultat.

$$\boxed{u_n = \int_0^n \frac{s^n}{n!} e^{-s} \mathrm{d}s}$$

2) Mise en place d'un changement de variables

a) La fonction f étant définie par $f(x) = xe^{x-1}$, elle est clairement $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$, en tant que produit et composée de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. On en déduit trivialement que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$.

$$\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } [0,1].}$$

Comme f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$, elle est $\mathscr{C}^n$ pour tout n et la formule de Taylor-Young nous prouve que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de 1.

De même f' est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$, donc elle admet un développement limité à tout ordre au voisinage de 1.

$$\boxed{f \text{ et } f' \text{ admettent un développement limité à tout ordre au voisinage de 1.}}$$

Posons alors $h = x - 1$. Lorsque x tends vers 1, le réel h tends vers 0, ce qui permet d'écrire :
$f(1+h)=(1+h)e^{-h}=(1+h)(1-h+\dfrac{h^2}{2}+o(h^2))=1-h+\dfrac{h^2}{2}+h-h^2+o(h^2)=1-\dfrac{h^2}{2}+o(h^2)$.
On en déduit alors le développement limité à l'ordre 2 de f en 1 en remplaçant h par $x-1$.

$$\boxed{f(x) = 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)}$$

Et comme on sait que f' admet un développement limité à l'ordre 1 en 1, celui-ci est obtenu en dérivant le développement ci-dessus.

$$\boxed{f'(x) = 1 - x + o(x-1)}$$

On en déduit directement des équivalents de $1-f$ et de f' au voisinage de 1.

$$\boxed{1 - f(x) \sim \frac{(x-1)^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{f'(x) \sim (1-x)}$$

b) On a $f'(x) = (1-x)e^{1-x}$, ce qui permet de donner le tableau de variation suivant pour f.

x	0		1
$f'(x)$		$+$	0
f	0	$\nearrow$	1

Donc f est strictement monotone de $[0,1]$ dans $[0,1]$, de plus f est continue, donc

$$\boxed{f \text{ réalise une bijection de } [0,1] \text{ sur } [0,1].}$$

Et f^{-1} est continue.

c) Il suffit de démontrer $\lim\limits_{y\to 1^-} \dfrac{1-f^{-1}(y)}{\sqrt{2(1-y)}} = 1$.

Soit $y \in [0,1[$. On déduit de la question précédente qu'il existe un unique $x \in [0,1[$ tel que $y = f(x)$, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{1-f^{-1}(y)}{\sqrt{2(1-y)}} = \frac{1-x}{\sqrt{2(1-f(x))}}.$$

La relation $1 = f^{-1}(1)$ assure alors que lorsque y tends vers 1^-, le réel x tend également vers 1^-. Il suffit donc de montrer

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{\sqrt{2(1-f(x))}} = 1.$$

On utilise pour cela la relation $1 - f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \dfrac{(x-1)^2}{2}$ obtenue à la question 3.1, qui donne $\sqrt{2(1-f(x))} \underset{x\to 1^-}{\sim} |x-1|$, et comme $x \in [0,1]$, $|x-1| = 1-x$ et on en déduit $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1-x}{\sqrt{2(1-f(x))}} = 1$, ce qui donne le résultat.

$$\boxed{1 - f^{-1}(y) \underset{y\to 1^-}{\sim} \sqrt{2(1-y)}}$$

d) Puisque f réalise une bijection continue de $[0,1]$ dans lui-même, il vient que f^{-1} est continue sur $[0,1]$.

$$\boxed{f^{-1} \text{ est continue sur } [0,1].}$$

Puisque f est dérivable sur $[0,1[$ et puisque sa dérivée ne s'annule pas sur cet intervalle, alors comme $f([0,1[) = [0,1[$, il vient que f' est dérivable sur $[0,1[$ de sorte que l'on ait la relation $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$. On en déduit ensuite que $(f^{-1})'$ est continue sur $[0,1[$, puisque f' et f^{-1} le sont.

$$\boxed{f' \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,1[\text{ et } (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.}$$

e) Si $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, alors $x = \cos\theta \in [0,1]$, ce qui prouve que $f^{-1}(\cos\theta)$ est bien défini. Et comme f^{-1} est à valeurs dans $[0,1]$, on en déduit que $g(\theta) = f'\left(f^{-1}(\cos\theta)\right)$ est bien défini. D'autre part, g est trivialement continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, en tant que composée de fonctions continues.

$$\boxed{\theta \mapsto f'\left(f^{-1}(\cos(\theta))\right) \text{ est définie et continue sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right].}$$

Posons $u = \cos\theta$ et $v = f^{-1}(u)$; il est clair que lorsque θ tends vers 0^+, u et v tendent vers 1^-. Or on a

$$g(\theta) = f'\left(f^{-1}(\cos\theta)\right) = f'\left(f^{-1}(u)\right) = f'(v).$$

D'après la question 2.a on a $f'(v) \sim 1 - v$, donc d'après la question 2.c on peut écrire :

$$f'\left(f^{-1}(u)\right) \sim 1 - f^{-1}(u) \sim \sqrt{2(1-u)}.$$

Enfin on a $\sqrt{2(1-u)} = \sqrt{2(1-\cos\theta)}$ et $1 - \cos\theta \sim \dfrac{\theta^2}{2}$ donc $g(\theta) \sim \left(\theta^2\right)^{1/2}$. D'où le résultat.

$$\boxed{g(\theta) \underset{\theta \to 0^+}{\sim} \theta}$$

f) On remarque déjà que l'on a pour tout θ dans $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$g(\theta) = 0 \ \Leftrightarrow\ f'\left(f^{-1}(\cos\theta)\right) = 0 \ \Leftrightarrow\ f^{-1}(\cos\theta) = 1 \ \Leftrightarrow\ \cos\theta = 1 \ \Leftrightarrow\ \theta = 0.$$

On en déduit alors que h est bien définie et continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, en tant que quotient d'une fonction continue par une fonction continue ne s'annulant pas.

$$\boxed{h \text{ est définie et continue sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right].}$$

Enfin, on déduit de la question précédente que h est équivalent à $\dfrac{\theta}{\theta} = 1$ lorsque θ tends vers 0^+, ce qui assure qu'elle est prolongeable par continuité au voisinage de 0^+, en associant la valeur 1 en 0 au prolongement.

$$\boxed{h \text{ est prolongeable par continuité en } 0.}$$

3) Une autre expression du terme général de la suite u

a) Un premier changement de variable

Il suffit de poser $t = \dfrac{s}{n}$ dans l'expression intégrale de u_n obtenue en 2.2.2; on obtient alors $u_n = \dfrac{n^{n+1}}{n!} \displaystyle\int_0^1 \left(te^{1-t}\right)^n \mathrm{d}t$, et par suite le résultat.

$$\boxed{u_n = \frac{n^{n+1}e^{-n}}{n!} \int_0^1 \left(te^{-t}\right)^n \mathrm{d}t}$$

b) Un second changement de variable plus délicat

i) F est l'unique primitive de f^n qui s'annule en 0. En tant que telle, elle est continue sur $[0,1]$.

$$\boxed{F \text{ est continue en } 1.}$$

ii) On commencer par remarquer que pour tout $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a

$$t = f^{-1}(\cos\theta) \Leftrightarrow \theta = \text{Arccos}\,(f(t)),$$

ce qui prouve que $\theta \mapsto f^{-1}(\cos\theta)$ définie une bijection sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. D'autre part, cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, en tant que composée de fonctions $\mathcal{C}^1$.
Soit $x \in [0,1[$. Les remarques ci-dessus prouvent que la fonction $\theta \mapsto f^{-1}(\cos\theta)$ réalise une bijection $\mathcal{C}^1$ de $\left[\text{Arccos}(f(x)), \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0,x]$, ce qui assure que l'on peut opérer le changement de variable $t = f^{-1}(\cos\theta)$ dans l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_0^x (f(t))^n\,\mathrm{d}t$. On obtient alors :

$$\int_0^x (f(t))^n\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\text{Arccos}(f(x))} \left(f \circ f^{-1}(\cos\theta)\right)^n \frac{d}{d\theta}\left(f^{-1}(\cos\theta)\right)\mathrm{d}\theta$$

On remarque alors que l'on a

$$\frac{d}{d\theta}\left(f^{-1}(\cos\theta)\right) = \frac{d}{d\theta}(\cos\theta) \times \left(f^{-1}\right)'(\cos\theta) = -\sin\theta \times \frac{1}{f' \circ f^{-1}(\cos\theta)} = -h(\theta).$$

D'où le résultat.

$$\boxed{F(x) = \int_{\text{Arccos}(f(x))}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n\,h(\theta)\mathrm{d}\theta}$$

iii) On a prouvé que h se prolonge par continuité au voisinage de 0, ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n\,h(\theta)\mathrm{d}\theta$ est convergente (en l'occurrence faussement impropre). On en déduit par définition :

$$\lim_{X \to 0^+} \int_X^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n\,h(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n\,h(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Considérons alors la relation suivante, valable pour tout $x \in [0,1[$:

$$F(x) = \int_{\text{Arccos}(f(x))}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n\,h(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Comme F est continue en 1 et comme $\lim\limits_{x \to 1^-} \text{Arccos}(f(x)) = 0$, on obtient le résultat en faisant tendre x vers 1^- dans la relation ci-dessus.

$$\boxed{\int_0^1 \left(te^{1-t}\right)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n\,h(\theta)\mathrm{d}\theta}$$

On déduit alors directement le second résultat en utilisant la question 3.a.

$$\boxed{u_n = \frac{n^{n+1}e^{-n}}{n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n\,h(\theta)\mathrm{d}\theta}$$

4) Enfin la formule de Stirling

En remplaçant l'expression de u_n à l'aide de la question $3.b.iii$ dans le résultat admis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$ il vient

$$\frac{n^{n+1}e^{-n}}{n!}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n\, h(\theta)\mathrm{d}\theta = u_n \sim \frac{1}{2}.$$

Soit

$$2n^{n+1}e^{-n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n\, h(\theta)\mathrm{d}\theta \sim n!.$$

En utilisant les résultat admis il vient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^n\, h(\theta)\mathrm{d}\theta \sim h(0)\sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Et comme on a prolongé h en lui associant la valeur 0 en 1 on en déduit

$$n! \sim 2n^{n+1}e^{-n}\sqrt{\frac{\pi}{2n}},$$

ce qui donne le résultat.

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

FIN DE L'ÉPREUVE