Épreuve de Mathématiques 2

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1 (Agro 2009, concours A, problème II)

Pour toute fonction $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous noterons $S_n(f) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Quelle est la limite de la suite $\big(S_n(f)\big)$? (*Aucune démonstration n'est attendue.*)

1) Application

Considérons la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}$

et la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$

a) Démontrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n + \dfrac{1}{2}u_n = u_{2n}$.

c) Démontrer alors que la suite (v_n) converge vers $\dfrac{1}{2}\ln 2$.

2) Développement asymptotique d'une somme de Riemann

Dans cette partie, f désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur le segment $[0;1]$, à valeurs réelles.

a) Justifier l'existence d'un nombre réel M tel que $\forall x \in [0;1]\,,\ |f^{(3)}(x)| \leqslant M$.

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![0;n-1]\!]$ et $t \in \left[\dfrac{k}{n};\dfrac{k+1}{n}\right]$.

i) À l'aide de la formule de Taylor–Lagrange appliquée à la fonction f de classe $\mathscr{C}^3$ sur l'intervalle $[k/n;t]$, démontrer que

$$\left|f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t-\frac{k}{n}\right)f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(t-\frac{k}{n}\right)^2 f''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{6}\left(t-\frac{k}{n}\right)^3.$$

ii) Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la primitive sur $\mathbb{R}$ de $t \longmapsto \left(t-\dfrac{k}{n}\right)^q$ qui s'annule en $\dfrac{k}{n}$?

iii) Par intégration entre $\dfrac{k}{n}$ et $\dfrac{k+1}{n}$, démontrer que

$$\left|\left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{6n^3}f''\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M}{24n^4}.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En additionnant les inégalités obtenues à la question 2) b) iii, démontrer que

$$\left|\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right) - S_n(f) - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'')\right| \leqslant \frac{M}{24n^3}.$$

d) Définissons la suite (ε_n) par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \varepsilon_n = n^2\left(S_n(f) + \frac{1}{2n}S_n(f') + \frac{1}{6n^2}S_n(f'') - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Démontrer que la suite (ε_n) converge vers 0 et que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'') + \frac{\varepsilon_n}{n^2}.$$

e) Justifier l'existence de deux suites (ε'_n) et (ε''_n) de limite nulle telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n(f') = \int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}S_n(f'') + \frac{\varepsilon'_n}{n}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n(f'') = \int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon''_n.$$

f) En déduire l'existence d'une suite (δ_n) de limite nulle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\delta_n}{n^2}.$$

Nous venons ainsi de démontrer que

$$S_n(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

3) Application

Les suites (u_n) et (v_n) ont été définies à la question 1.

a) Démontrer qu'il existe une suite (α_n) de limite nulle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = \ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + \frac{\alpha_n}{n^2}.$$

b) En déduire un équivalent simple de $u_n - \ln 2$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c) Démontrer que $v_n - \dfrac{1}{2}\ln 2 \sim -\dfrac{1}{64n^2}$

Exercice 2 (E3A 2007, PC, partiel, et EMLyon 2009)

Dans tout le problème, on désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé du plan.

A. Étude de la fonction f

1) Étude de f en 0.

a) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$.

b) Peut-on déduire du développement limité du a), <u>sans nouveaux calculs</u>, que : (justifier avec soin)

- f est continue en 0 ?
- f est dérivable en 0 et la valeur de $f'(0)$?
- f est deux fois dérivable en 0 et la valeur de $f''(0)$?

c) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

d) Donner une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0 et préciser la position de (C) par rapport à T au voisinage de 0.

2) Variations de f.
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x - e^x + 1$.

a) Dresser le tableau de variations complet de g et donner le signe de g.

b) Donner les variations de f.

c) Donner les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et préciser la nature des branches infinies de (C) : montrer en particulier que (C) possède deux asymptotes et préciser la position de (C) par rapport à ses asymptotes.

d) Donner l'allure de (C) (faire apparaître les asymptotes et T).

B. Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f.
On considère la suite(u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.

2) **a)** Établir : $\forall x \in [0, +\infty[, \quad e^{2x} - 2xe^x - 1 \geqslant 0.$

b) Montrer : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) + \dfrac{1}{2} \geqslant 0.$

c) Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[, \quad -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0.$

d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|.$

3) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|1 - \alpha|.$

4) En déduire que (u_n) converge vers une limite que l'on précisera.

Exercice 3 (Agro 2012, concours A, problème II)

Nous admettrons dans la suite du problème que pour toute fonction $u : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et ne s'annulant pas en 0 : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(\theta)\,(\cos(\theta))^n\,\mathrm{d}\theta \underset{n\to+\infty}{\sim} u(0)\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Considérons la suite u définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 - e^{-n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}$. On admet que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

1) Expression intégrale du terme général de la suite u

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t\mathrm{d}t.$

b) En déduire par un changement de variable, que pour tout entier naturel n : $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{s^n}{n!}e^{-s}\mathrm{d}s.$

2) Mise en place d'un changement de variables

Considérons la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $\forall x \in [0,1],\ f(x) = xe^{1-x}$.

a) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $[0,1]$.
En déduire l'existence d'un développement limité à tout ordre pour f et f' au voisinage de 1.
Calculer le développement limité à l'ordre 2 de f en 1, et celui à l'ordre 1 de f' en 1.
En déduire alors un équivalent simple de $1 - f(x)$ et $f'(x)$ en 1.

b) Montrer que f réalise une bijection du segment $[0,1]$ dans lui-même.
f^{-1} désigne donc la bijection réciproque de f.

c) Montrer que : $1 - f^{-1}(y) \underset{y\to1^-}{\sim} \sqrt{2(1-y)}.$

d) Justifier que f^{-1} est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $[0,1[$, préciser une expression de $\left(f^{-1}\right)'$ et montrer que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.

e) Montrer que la fonction $g : \theta \mapsto f'\left(f^{-1}\left(\cos(\theta)\right)\right)$ est définie et continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, et déterminer un équivalent de g en 0^+.

f) Montrer que la fonction $h : \theta \mapsto \dfrac{\sin(\theta)}{g(\theta)}$ est définie et continue sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, et est prolongeable par continuité en 0.

Dans la suite, h désigne la fonction ainsi prolongée.

3) Une autre expression du terme général de la suite u

a) Un premier changement de variable

Montrer que pour tout entier naturel n : $u_n = \dfrac{n^{n+1}e^{-n}}{n!} \displaystyle\int_0^1 \left(te^{-t}\right)^n \mathrm{d}t$.

b) Un second changement de variable plus délicat

n désigne un entier naturel non nul,
notons pour tout réel x appartenant à $[0,1]$: $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(te^{1-t}\right)^n \mathrm{d}t$.

i) Que représente la fonction F ?
En déduire que F est en particulier continue en 1.

ii) À l'aide du changement de variable $t = f^{-1}\left(\cos(\theta)\right)$, $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, montrer que pour tout réel x appartenant à $[0,1[$: $F(x) = \displaystyle\int_{\mathrm{Arccos}(f(x))}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(\theta)\right)^n h(\theta)\mathrm{d}\theta$.
Les fonctions f et h ont été définies à la question 3.

iii) En déduire que : $\displaystyle\int_0^1 \left(te^{1-t}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(\theta)\right)^n h(\theta)\mathrm{d}\theta$,

puis que : $u_n = \dfrac{n^{n+1}e^{-n}}{n!} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(\theta)\right)^n h(\theta)\mathrm{d}\theta$.

4) Enfin la formule de Stirling

Montrer que : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

FIN DE L'ÉPREUVE