Lycée La Prat's
Classe de PT

Vendredi 1er octobre 2010

Épreuve de Mathématiques 2

Correction

Exercice 1 (Petites mines, 2009, épreuve commune, partiel)

A. Etude d'une fonction

1) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$, qui es symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(-x) = -x \,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{-x}\right) = -x(-\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right)) = f(x)$$

Ainsi f est paire.

2) **a)** En 0, $\mathrm{sh}\, X \sim X$, ce qui entraîne qu'au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$, $\mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$, et donc $f(x) \sim 1$. Ainsi $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = 1$.

b) Au voisinage de $+\infty$, $\frac{1}{X}\,\mathrm{sh}\,(X) \sim \frac{1}{X}\frac{e^X}{2}$. d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{X}\frac{e^X}{2} = +\infty$.
La fonction f est paire, donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$.

3) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car composée de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \mathrm{sh}\left(\frac{1}{x}\right) + x\left(-\frac{1}{x^2}\,\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \left[\mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right]\mathrm{ch}\left(\frac{1}{x}\right)$$

4) Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi(x) = \mathrm{th}\,(x) - x$. La fonction φ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ car composée de fonctions $\mathscr{C}^\infty$, et $\varphi'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) - 1 = -\,\mathrm{th}^2(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Ainsi φ est strictement décroissante et $\varphi(x) < \varphi(0) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire pour tout $X \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{th}\,(X) < X$.

5) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{th}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} < 0$ d'après le résultat de la question précédente, et $\mathrm{ch}\,(x) > 0$. Donc $f' < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Le tableau sur $\mathbb{R}_-$ s'obtient par symétrie.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$-$
f	$1 \nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow 1$

6) Le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction sh est $\mathrm{sh}\,(X) = X + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} + o(X^5)$. Ainsi

$$\frac{\mathrm{sh}\,X}{X} = 1 + \frac{X^2}{3!} + \frac{X^4}{5!} + o(X^4)$$

7) Au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$, f admet donc un développement de la forme

$$f(x) = 1 + \frac{(1/x)^2}{3!} + \frac{(1/x)^4}{5!} + o((1/x)^4) = 1 + \frac{1}{3!x^2} + \frac{1}{5!x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

Donc $a_1 = a_3 = 0$, $a_0 = 1$, $a_2 = \frac{1}{3!}$ et $a_4 = \frac{1}{5!}$.

8) D'après la question 6, $f(1/X) = \dfrac{\operatorname{sh} X}{X} = 1 + o(X)$. Ainsi $x \to f(1/x)$ admet un développement limité à l'ordre 1 en 0. Donc cette fonction est prolongeable par continuité en 0, et son prolongement F est dérivable en 0.
De plus, F est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonction $\mathscr{C}^\infty$. En conclusion, F est dérivable sur $\mathbb{R}$.

B. Etude d'une suite

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que $\dfrac{n+1}{n} > 1$.
La fonction f est continue strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur son image $]1, +\infty[$. Ainsi $\dfrac{n+1}{n}$ a un unique antécédent par f, c'est-à-dire que l'équation $f(x) = \dfrac{n+1}{n}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc

$$\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n} = \frac{n+1}{n} \Longrightarrow f(u_{n+1}) < f(u_n) \Longrightarrow u_{n+1} > u_n$$

La suite (u_n) est donc croissante.

3) Notons $g :]1, +\infty[\to \mathbb{R}_+^*$ la fonction réciproque de f sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors $u_n = g\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ et $\lim_1 g = +\infty$. Donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

4) La suite (u_n) tend vers $+\infty$ donc on peut composer les développements asymptotiques : en tronquant à l'ordre 2 le développement de la question A.7.,

$$1 + \frac{1}{n} = f(u_n) = 1 + \frac{1}{3! u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right)$$

D'où $\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{6} \dfrac{1}{u_n^2} + o\left(\dfrac{1}{u_n^2}\right)$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{6} \dfrac{1}{u_n^2}$. En conclusion

$$u_n \sim \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{n}$$

Exercice 2 (E3A 2007, PC, partiel, et EMLyon 2009)

A. Étude de la fonction f

1) Étude de f en 0.

a) $e^x - 1 = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)$ donc

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + o(x^2) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)$$

.

b)
- Pour tout $x \neq 0$, $f(x) - f(0) = \dfrac{x}{e^x - 1} - 1 = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{12} + o(x^2) = o(1)$.
  Donc f est continue en 0.
- Pour tout $x \neq 0$, $f(x) - f(0) = \dfrac{x}{e^x - 1} - 1 = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{12} + o(x^2) = -\dfrac{1}{2}x + o(x)$.
  Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.
- On ne peut rien déduire de plus : la fonction $x \mapsto x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ admet un DL à l'ordre 2 en 0 mais n'est pas $\mathscr{C}^1$.

c) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ car composée de fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x - x^2}{(e^x - 1)^2} \sim \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2} = f'(0)$$

Donc f' est continue en 0, et f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

d) Équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0 : $y = 1 - \dfrac{1}{2}x$.

D'après la question A.1)a), $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{12}x^2 + o(x^2)$.

Puisque $\dfrac{1}{12}x^2 > 0$ pour tout x dans un voisinage de 0, la courbe est au-dessus de la tangente.

2) Variations de f.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$. Donc g' est du signe de x et il vient

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	1	↘	0	↗	$+\infty$
signe de $g(x)$		$+$	0	$+$	

b) D'après le calcul de la question A.1)c), $f'(x) = -\dfrac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$. Donc f' est du signe de $-g$ sur $\mathbb{R}^*$. De plus, d'après A.1)b), $f'(0) < 0$. En conclusion, $f' < 0$ sur $\mathbb{R}$ et f strictement décroissante.

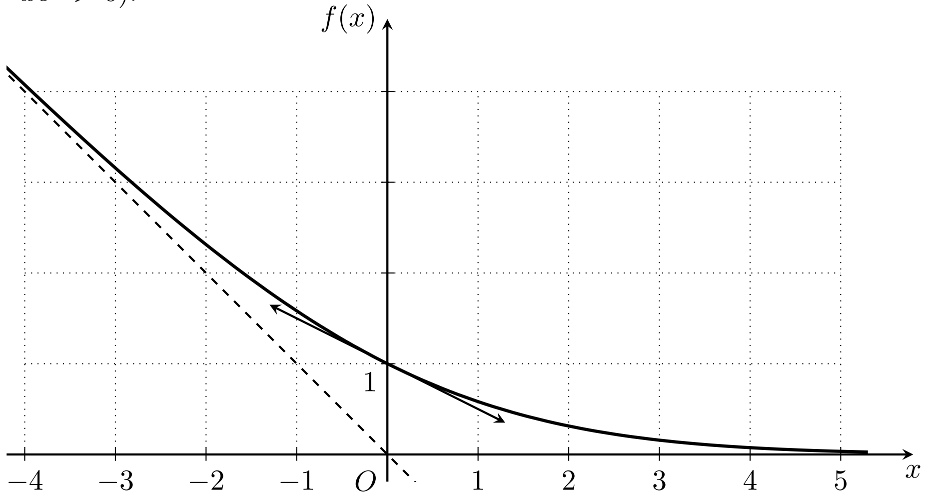
c) <u>Au voisinage de $+\infty$</u> : $f(x) \sim \dfrac{x}{e^x} \to 0$ et $f > 0$ donc (C) admet une asymptote d'équation $y = 0$ et est au-dessus de celle-ci.

<u>Au voisinage de $-\infty$</u> : $u = e^x \to 0$ lorsque $x \to -\infty$ donc

$$f(x) = -x\left(\frac{1}{1 - e^x}\right) = -x - xe^x + o(xe^x)$$

Ainsi $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$, de plus (C) admet une asymptote d'équation $y = -x$ et est au-dessus de celle-ci (car $-xe^x > 0$).

d)



3) Expression hyperbolique de f.

a) $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{1}{\operatorname{th}(x/2)} - 1\right) = \dfrac{x}{2}\left(\dfrac{e^{x/2} + e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}} - 1\right) = \dfrac{x}{2}\left(\dfrac{2e^{-x/2}}{e^{x/2} - e^{-x/2}}\right) \times \dfrac{e^{x/2}}{e^{x/2}} = f(x)$.

b) i. On fait apparaître l'expression de f trouvée ci-dessus. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{x}{2}t\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{th}(x/2)} - \frac{2}{x}\right) = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{th}(x/2)} - 1\right) + \frac{x}{2}\left(1 - \frac{2}{x}\right) = f(x) + \frac{x}{2} - 1 = f_1(x)$$

ii. La fonction f_1 est le produit de deux fonctions impaires, c'est donc une fonction paire.

iii. Soit s la symétrie par rapport à (Oy) parallèlement à la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x$. Cette symétrie a pour équation $s : (x, y) \mapsto (-x, x + y)$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = -\frac{1}{2}(-x) + 1 + f_1(-x) = \frac{1}{2}x + 1 + f_1(x) = x - \frac{1}{2}x + 1 + f_1(x) = x + f(x)$$

Donc $s(x, f(x)) = (-x, x + f(x)) = (-x, f(-x))$, et la courbe (C) est laissée stable par la symétrie s.

B. Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f.

1) Cherchons les $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(\alpha) = \alpha$.
$f(0) = 1 \neq 0$ donc $\alpha \neq 0$, et $f(\alpha) = \dfrac{\alpha}{e^\alpha - 1}$.

$$f(\alpha) = \alpha \iff \frac{1}{e^\alpha - 1} = 1 \iff e^\alpha = 2 \iff \alpha = \ln(2)$$

La fonction f admet don un unique point fixe, $\alpha = \ln(2)$.

2) **a)** Pour tout $x \in [0, +\infty[$, posons $\varphi(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1$.
La fonction φ est $\mathscr{C}^\infty$ et $\varphi'(x) = 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x = 2(e^x - 1 - x)e^x$. En dérivant $x \mapsto e^x - 1 - x$ on montre que cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc que $e^x - 1 - x \geqslant e^0 - 1 - 0 = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
Ainsi $\varphi' \geqslant 0$ et φ est croissante, donc $\varphi(x) \geqslant \varphi(0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\forall x \in [0, +\infty[\qquad e^{2x} - 2xe^x - 1 \geqslant 0$$

(on peut aussi astucieusement factoriser par e^x, et l'expression s'étudie beaucoup plus rapidement)

b) Soit $x \in]0, +\infty[$, d'après la question précédente

$$f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x - 1)^2} \geqslant 0$$

c) $f'(0) = -\dfrac{1}{2} \in [-1/2, 0[$. D'après A.2)a), $f' < 0$, et d'après la question précédente, $f' \geqslant -1/2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En conclusion

$$\forall x \in [0, +\infty[\qquad -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est continue et dérivable entre u_n et α, donc l'inégalité des accroissements finis s'écrit

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant (\sup_{x \in I} |f'(x)|)|u_n - \alpha|$$

Où I est l'intervalle de bornes u_n et α. Puisque $\sup\limits_{x \in I} |f'(x)| \leqslant \sup\limits_{x \in \mathbb{R}_+} |f'(x)| = \dfrac{1}{2}$ d'après c),

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$

3) Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(n) : \quad |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|1 - \alpha|$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ est vraie par hypothèse.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. Donc, d'après la question précédente, il vient

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}|1 - \alpha|$$

Et $\mathcal{H}(n + 1)$ est vraie.

- Conclusion : $\forall n \geqslant 0 \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|1-\alpha|$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0$ et la suite (u_n) converge vers $\alpha = \ln 2$.

Exercice 3 (Agro 2009, concours A, problème II, corrigé UPS)

La quantité $S_n(f)$ est la n-ème somme de Riemann de la fonction f sur $[0;1]$. La fonction f étant continue sur ce segment, un théorème du cours dit que

$$\boxed{\text{La suite } \big(S_n(f)\big) \text{ converge vers } \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t.}$$

1) Application

a) Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k/n)+1} = S_n(h) \qquad \text{où} \qquad \forall x \in [0;1]\,,\ h(x) = \frac{1}{1+x},$$

donc, d'après le résultat sur les sommes de Riemann rappelé à la question 0, on peut affirmer que (u_n) converge et

$$\lim u_n = \int_0^1 h(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \big[\ln|1+x|\big]_0^1 = \ln 2 - 0.$$

En conclusion,

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \ln 2.}$$

b) Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} v_n + \frac{1}{2}u_n &= \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+n} \\ &= \sum_{k'=0}^{n-1} \frac{1}{2k'+1+2n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+2n} \qquad \text{en posant } k = k'+n \text{ dans la première somme} \\ &= \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ impair}}}^{2n-1} \frac{1}{p+2n} + \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ pair}}}^{2n-1} \frac{1}{p+2n} = \sum_{p=0}^{2n-1} \frac{1}{p+2n} = u_{2n}, \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n + \frac{1}{2}u_n = u_{2n}.}$$

c) La relation de la question précédente nous dit que, pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = u_{2n} - \dfrac{1}{2}u_n$.
Or la suite (u_{2n}) étant extraite de (u_n), elle converge vers la même limite que (u_n), c'est-à-dire $\ln 2$. Donc (v_n) converge (comme combinaison linéaire de suites convergentes) et l'on a

$$\lim v_n = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2.$$

En conclusion,

$$\boxed{(v_n) \text{ converge bien vers } \frac{1}{2}\ln 2.}$$

2) Développement asymptotique d'une somme de Riemann

a) La fonction f étant $\mathcal{C}^\infty$, sa dérivée troisième $f^{(3)}$ est a fortiori continue sur le segment $[0;1]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes. Par conséquent,

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [0;1]\,, \qquad |f^{(3)}(x)| \leqslant M.}$$

b) i. Comme nous le suggère l'énoncé, appliquons la formule de Taylor-Lagrange à la fonction f sur l'intervalle $[k/n;t]$ où elle est de classe $\mathcal{C}^3$, ce qui donne l'existence de $c \in]k/n;t[$ tel que

$$f(t) = f\Big(\frac{k}{n}\Big) + \Big(t-\frac{k}{n}\Big)f'\Big(\frac{k}{n}\Big) + \frac{1}{2}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^2 f''\Big(\frac{k}{n}\Big) + \frac{1}{6}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^3 f'''(c).$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}\left|f(t) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \Big(t-\frac{k}{n}\Big)f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^2 f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\right| &= \frac{1}{6}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^3 |f'''(c)| \\ &\leqslant \frac{1}{6}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^3 M,\end{aligned}$$

puisque $|f'''(c)| \leqslant M$ d'après le résultat de la question précédente appliqué en c (qui appartient bien à $]0;1[$ car $]k/n;t[\subset]0;1[$). En conclusion,

$$\boxed{\left|f(t) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \Big(t-\frac{k}{n}\Big)f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^2 f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\right| \leqslant \frac{M}{6}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^3.}$$

ii. On voit immédiatement que

$$\boxed{\text{La primitive sur } \mathbb{R} \text{ de } t \mapsto \Big(t-\frac{k}{n}\Big)^q \text{ qui s'annule en } \frac{k}{n} \text{ est } t \mapsto \frac{1}{q+1}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^{q+1}.}$$

iii. On a

$$\begin{aligned}&\int_{k/n}^{(k+1)/n} \left[f(t) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \Big(t-\frac{k}{n}\Big)f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^2 f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\right] \mathrm{d}t \\ =\ & \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\ \mathrm{d}t - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\int_{k/n}^{(k+1)/n} 1\ \mathrm{d}t - f'\Big(\frac{k}{n}\Big)\int_{k/n}^{(k+1)/n}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)\ \mathrm{d}t \\ & \qquad -\frac{1}{2}f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\int_{k/n}^{(k+1)/n}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^2\ \mathrm{d}t \\ =\ & \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\ \mathrm{d}t - f\Big(\frac{k}{n}\Big)[t]_{k/n}^{(k+1)/n} - f'\Big(\frac{k}{n}\Big)\left[\frac{1}{2}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^2\right]_{k/n}^{(k+1)/n} \\ & \qquad -\frac{1}{2}f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\left[\frac{1}{3}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^3\right]_{k/n}^{(k+1)/n} \\ =\ & \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\ \mathrm{d}t - f\Big(\frac{k}{n}\Big)\frac{1}{n} - f'\Big(\frac{k}{n}\Big)\frac{1}{2n^2} - f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\frac{1}{6n^3},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}&\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2n^2}f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{6n^3}f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\right| \\ =\ & \left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} \left[f(t) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \Big(t-\frac{k}{n}\Big)f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^2 f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\right] \mathrm{d}t\right| \\ \leqslant\ & \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left|f(t) - f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \Big(t-\frac{k}{n}\Big)f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^2 f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\right| \mathrm{d}t \\ \leqslant\ & \int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{M}{6}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^3\ \mathrm{d}t \qquad \text{d'après } \alpha]\end{aligned}$$

Or

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{M}{6}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^3\ \mathrm{d}t = \frac{M}{6}\left[\frac{1}{4}\Big(t-\frac{k}{n}\Big)^4\right]_{k/n}^{(k+1)/n} = \frac{M}{24n^4},$$

donc

$$\boxed{\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2n^2}f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{6n^3}f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\right| \leqslant \frac{M}{24n^4}.}$$

c) On a
$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - S_n(f) - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'')\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{6n^3}\sum_{k=0}^{n-1} f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2n^2} f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{6n^3} f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{2n^2} f'\Big(\frac{k}{n}\Big) - \frac{1}{6n^3} f''\Big(\frac{k}{n}\Big)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M}{24n^4} \qquad \text{d'après b).}
\end{aligned}$$

Or
$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{M}{24n^4} = n\times\frac{M}{24n^4} = \frac{M}{24n^3},$$

donc
$$\boxed{\left|\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - S_n(f) - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'')\right| \leqslant \frac{M}{24n^3}.}$$

d) Le résultat de la question précédente nous dit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$|\varepsilon_n| = n^2\left|S_n(f) + \frac{1}{2n}S_n(f') + \frac{1}{6n^2}S_n(f'') - \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant n^2\frac{M}{24n^3} = \frac{M}{24n}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} M/(24n) = 0$, par encadrement, il vient
$$\boxed{(\varepsilon_n) \text{ converge vers } 0.}$$

On en déduit immédiatement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$S_n(f) = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'') + \frac{\varepsilon_n}{n^2},$$

et donc
$$\boxed{S_n(f) = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}S_n(f') - \frac{1}{6n^2}S_n(f'') + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).}$$

e) Si l'on applique le résultat de la question précédente à la fonction f' (ce qui est licite puisque f' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^3$), on obtient
$$S_n(f') = \int_0^1 f'(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}S_n(f'') - \frac{1}{6n^2}S_n(f''') + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

Or la suite $\big(S_n(f''')\big)$ est bornée puisqu'elle converge d'après le résultat rappelé à la question 0, donc
$$\frac{1}{6n^2}S_n(f''') = o\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

ce qui donne
$$\boxed{S_n(f') = \int_0^1 f'(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}S_n(f'') + o\Big(\frac{1}{n}\Big).}$$

La fonction f'' étant continue, le théorème sur les sommes de Riemann (celui que l'on a utilisé à la question 0) dit que
$$S_n(f'') \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f''(t)\ \mathrm{d}t,$$

ce que l'on peut écrire

$$\boxed{S_n(f'') = \int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t + o(1).}$$

f) En combinant les trois derniers résultats encadrés, on obtient

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\Big(\int_0^1 f'(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}S_n(f'') + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) - \frac{1}{6n^2}S_n(f'') + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \\ &= \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}S_n(f'') + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \\ &= \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\Big(\int_0^1 f''(t)\ \mathrm{d}t + o(1)\Big) + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \\ &= \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\,\d{t} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{S_n(f) = \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 f'(t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 f''(t)\ \mathrm{d}t + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\cdot}$$

3) a) Nous avons déjà signalé que

$$u_n = S_n(h) \qquad \text{où} \qquad \forall x \in [0;1]\,,\ h(x) = \frac{1}{1+x}\cdot$$

En appliquant le résultat de la question précédente à la fonction h, on obtient

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^1 h(t)\ \mathrm{d}t - \frac{1}{2n}\int_0^1 h'(t)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{12n^2}\int_0^1 h''(t)\ \mathrm{d}t + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \frac{1}{2n}\big[h(t)\big]_0^1 + \frac{1}{12n^2}\big[h'(t)\big]_0^1 + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \\ &= \big[\ln|1+t|\big]_0^1 - \frac{1}{2n}\Big[\frac{1}{1+t}\Big]_0^1 + \frac{1}{12n^2}\Big[-\frac{1}{(1+t)^2}\Big]_0^1 + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \\ &= \ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{u_n = \ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\cdot}$$

b) On en déduit immédiatement que

$$u_n - \ln 2 = \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

donc

$$\boxed{u_n - \ln 2 \sim \frac{1}{4n}\cdot}$$

c) Pour tout $n \geqslant 1$, les résultats des questions 1. c) et 3. b) donnent

$$\begin{aligned} v_n &= u_{2n} - \frac{1}{2}u_n = \ln 2 + \frac{1}{8n} + \frac{1}{64n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) - \frac{1}{2}\Big(\ln 2 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{16n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{64n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big), \end{aligned}$$

donc

$$v_n - \frac{1}{2}\ln 2 = -\frac{1}{64n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big),$$

ce qui donne

$$\boxed{v_n - \frac{1}{2}\ln 2 \sim -\frac{1}{64n^2}\cdot}$$