Épreuve de Mathématiques 1

Correction

Exercice 1 (PT 2014 C)

Partie 1

1) a) La fonction R_n est dérivable car composée de fonctions dérivables.

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad R_n'(t) = e^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{kt^{k-1}}{k!} = e^t - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} = e^t - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} = R_n(t) + \frac{t^n}{n!}$$

Ainsi, $\boxed{R_n \text{ est une solution sur } \mathbb{R} \text{ de l'équation différentielle } y'(t) - y(t) = \frac{t^n}{n!}}$

b) La solution générale sur $\mathbb{R}$ de $(\mathcal{E}_0)$ est $\boxed{t \mapsto \lambda e^t \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$

c) Méthode de variation de la constante. Soit $y(t) = \lambda(t)e^t$ une solution de $(\mathcal{E})$.

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } (\mathcal{E}) \quad &\iff \quad \lambda'(t)e^t + \lambda(t)e^t - \lambda(t)e^t = \frac{t^n}{n!} \\ &\iff \quad \lambda'(t) = \frac{t^n}{n!}e^{-t} \\ &\iff \quad \lambda(t) - \lambda(0) = \int_0^t \frac{u^n}{n!} e^{-u}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Donc les solutions de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$\boxed{y(t) = \lambda e^t + e^t \int_0^t \frac{u^n}{n!} e^{-u}\,\mathrm{d}u}$$

d) R_n est la solution de $(\mathcal{E})$ pour la condition initiale $y(0) = R_n(0) = 1 - 1 = 0$.
Par unicité de la solution d'une équation différentielle d'ordre 1 avec une condition initiale, $R_n = y$ avec $y(0) = 0 = \lambda + 0$. En conclusion,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \quad R_n(t) = e^t \int_0^t \frac{u^n}{n!} e^{-u}\,\mathrm{d}u}$$

e) Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Comme, pour tout $u \in [0,t]$, $0 \leqslant u \leqslant t$, tout est positif et il vient

$$|R_n(t)| = e^t \int_0^t \frac{u^n}{n!} e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

De plus, pour tout $u \in [0,t]$, $e^{-u} \leqslant 1$, donc

$$|R_n(t)| \leqslant e^t \int_0^t \frac{u^n}{n!}\,\mathrm{d}u = \frac{t^{n+1}e^t}{(n+1)!}$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+ \qquad |R_n(t)| \leqslant \frac{t^{n+1}e^t}{(n+1)!}}$$

f) Soit $t \in \mathbb{R}_-$: $t = -|t|$. D'après d), $R_n(t) = e^{-|t|} \displaystyle\int_0^{-|t|} \frac{u^n}{n!} e^{-u} \, \mathrm{d}u$.

En effectuant le changement de variable $v = -u$, il vient $R_n(t) = e^{-|t|} \displaystyle\int_0^{|t|} \frac{(-v)^n}{n!} e^v (-1) \, \mathrm{d}v$.

Donc en prenant la valeur absolue, $|R_n(t)| = e^{-2|t|} R_n(|t|)$. Or d'après e), $R_n(|t|) \leqslant \dfrac{t^{n+1} e^t}{(n+1)!}$. Ainsi,

$$|R_n(t)| \leqslant \frac{|t|^{n+1} e^{-|t|}}{(n+1)!}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. Par croissance comparée, $\dfrac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. D'après ci-dessus et e), selon le signe de t, le majorant de $|R_n(t)|$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Finalement, par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(t) = 0$. Ce qui s'écrit aussi

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}}$$

2) **a)** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$, donc $\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante}}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!(n+1)} - \frac{1}{n!n} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{(n+1)!(n+1)n} = -\frac{1}{(n+1)!(n+1)n} < 0$$

donc $\boxed{(v_n) \text{ est strictement décroissante}}$

b) D'après a), (u_n) est croissante, (v_n) décroissante, et de plus

$$v_n - u_n = \frac{1}{n!n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

donc $\boxed{\text{Les suites } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes}}$

Par conséquent d'après le théorème des suites adjacentes,

$$\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers la même limite } \ell}$$

De plus, d'après la question 1)f) pour $t = 1$, (u_n) converge vers $e^1 = e$. Ainsi,

$$\boxed{\ell = e}$$

c) Comme (u_n) est strictement croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < e$.

De même, (v_n) strictement décroissante, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e < v_n$. En conclusion,

$$\boxed{\forall q \in \mathbb{N}^*, \quad u_q < e < v_q}$$

d) Pour tout $k \in [\![0, q]\!]$, $\dfrac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$, donc $N_q = q! u_q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$.

En multipliant l'encadrement du c) par $q!$ et en remplaçant e par $\dfrac{p}{q}$: $\qquad N_q < (q-1)!p < N_q + \dfrac{1}{q}$

Or dans les entiers, $a < b$ entraîne $a + 1 \leqslant b$, ainsi l'encadrement s'écrit

$$N_q + 1 \leqslant (q-1)!p < N_q + \underbrace{\frac{1}{q}}_{\leqslant 1} \leqslant N_q + 1$$

Ce qui est absurde : par conséquent, $\boxed{e \text{ est irrationnel}}$

e) On reconnaît le théorème de Cesàro.

i) D'après 2)b), $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$ donc par définition de la limite il existe un rang n_0 tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$:

$$|u_n - e| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

ii) Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ qui convient et $n \geqslant n_0$.

$$w_n - e = \frac{1}{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - ne\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}(u_k - e) + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}(u_k - e)$$

Or, par construction de n_0, pour tout $k \geqslant n_0$, $|u_k - e| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, avec $K = \left|\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k - e\right|$,

$$\begin{aligned} |w_n - e| &\leqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n_0-1} u_k - e\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}|u_k - e| \\ &\leqslant \frac{K}{n} + \Big(\frac{n - n_0 + 1}{n}\Big)\frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Or K constant par rapport à n, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{K}{n} = 0$, et, de même qu'en i), il existe un rang $n_1 \geqslant n_0$ tel que $\frac{K}{n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Soit un tel rang n_1. Comme $\frac{n - n_0 + 1}{n} \leqslant 1$, il vient

$$\forall n \geqslant n_1 \qquad |w_n - e| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Conclusion : Il existe un rang, n_1 tel que pour tout entier $n \geqslant n_1$:

$$|w_n - e| \leqslant \varepsilon$$

iii) Nous venons de montrer que

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N}/\ \forall n \geqslant n_1\ |w_n - e| \leqslant \varepsilon$$

C'est à dire $\boxed{(w_n) \text{ converge vers } e}$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$.

$$e_n = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{-n} = e^{-n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{-n\left(-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\right)} = e^{1+o(1)}$$

Ainsi, comme $1 + o(1)$ a pour limite 1 lorsque $n \to +\infty$, et que l'exponentielle est continue en 1,

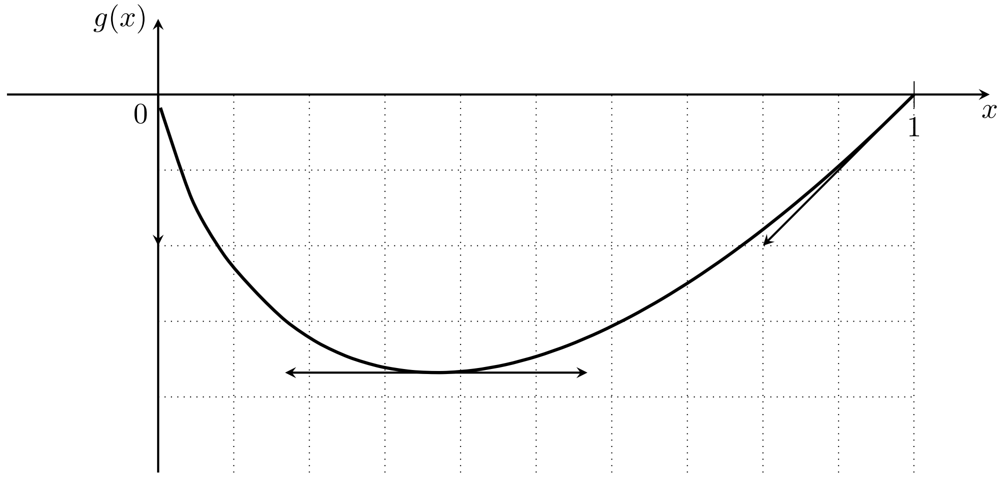
$$\boxed{(e_n) \text{ converge vers } e}$$

Partie 2

1) Continuité, dérivabilité :
La fonction g est continue et dérivable sur $]0,1]$ comme composée de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,1]$.
En 0, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0 = g(0)$, donc g est continue en 0.
De plus $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \ln x \xrightarrow[x\to0^+]{} -\infty$
En conclusion, $\boxed{\text{La fonction } g \text{ est continue sur } [0,1], \text{ dérivable sur }]0,1] \text{ mais pas en } 0.}$
De plus, la courbe $\mathscr{C}_g$ admet une tangente verticale en 0.
Variations : Pour tout $x \in]0,1]$, $g'(x) = (\ln x) + 1$.

x	0		e^{-1}		1
$g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	1
g	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	0

Pour vérifier vos calculs, par exemple le signe de la dérivée : tester quelques valeurs, par exemple ici $x = 1$ (qui sert pour tracer la courbe, en plus).



2) D'après le tableau de variation précédent, $\inf_{x\in[0,1]} g(x) = -e^{-1}$ et $\sup_{x\in[0,1]} g(x) = 0$.

Donc $\boxed{M = \sup_{x\in[0,1]} |g(x)| \text{ existe et } M = \max\left(\left|\inf_{x\in[0,1]} g(x)\right|, \left|\sup_{x\in[0,1]} g(x)\right|\right) = e^{-1}}$

Si on ne nous demandais pas la valeur du maximum, nous aurions pu nous contenter d'appliquer le théorème « $|g|$ continue sur le segment $[0,1]$ donc est bornée et atteint ses bornes ».

3) Comme g est décroissante sur $[0, e^{-1}]$, $-g$ est croissante sur cet intervalle.
<u>Montrons que, sur $]0, e^{-1}]$, $x \leqslant -g(x)$</u> :
Soit $h(x) = x + g(x)$, h est dérivable sur $]0,1]$ d'après 1) et $h'(x) = 1 + g'(x) = 2 + \ln x$. D'où le tableau

- $\lim_{0^+} h = 0$
- $h(e^{-1}) = 0$

x	0		e^{-2}		e^{-1}
$h'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	1
h	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

Donc $\forall x \in]0, e^{-1}]$, $h(x) \leqslant 0$, c'est-à-dire $x \leqslant -g(x)$.
Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad t_0 \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant e^{-1}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- <u>$\mathcal{H}_0$</u> : D'après ci-dessus, $x \leqslant -g(x)$ sur $]0, e^{-1}]$ donc en particulier pour t_0. Ainsi $t_0 \leqslant -g(t_0) = t_1$.
De plus, d'après le tableau de variation de g, $\forall x \in [0,1]$, $-g(x) \leqslant e^{-1}$. Donc $t_1 \leqslant e^{-1}$.
Finalement : $t_0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant e^{-1}$, et $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- <u>$\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$</u> : Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie : $t_0 \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant e^{-1}$

$$\begin{array}{lll}\Longrightarrow & -g(t_0) \leqslant -g(t_n) \leqslant -g(t_{n+1}) \leqslant -g(e^{-1}) & \text{(en appliquant } -g\text{, croissante sur }]0, e^{-1}]) \\ \Longrightarrow & t_1 \leqslant t_{n+1} \leqslant t_{n+2} \leqslant e^{-1} & \\ \Longrightarrow & t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_{n+1} \leqslant t_{n+2} \leqslant e^{-1} & (\mathcal{H}_0)\end{array}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad t_0 \leqslant t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant e^{-1}}$

4) La fonction g' est dérivable sur $I = [t_0, e^{-1}] \subset \mathbb{R}_+^*$, et $g''(x) = \dfrac{1}{x}$. Cette fonction vérifie l'encadrement

$$\forall u \in I \qquad 0 < g''(u) \leqslant \frac{1}{t_0}$$

Soit $x \in [t_0, e^{-1}]$ fixé. En intégrant cet encadrement entre x et e^{-1} ($x \leqslant e^{-1}$), il vient

$$0 \leqslant \int_x^{e^{-1}} g''(u)\,\mathrm{d}u = g'(e^{-1}) - g'(x) \leqslant \frac{1}{t_0}(e^{-1} - x)$$

Or $g'(e^{-1}) = 0$ donc

$$\boxed{0 \leqslant -g'(x) \leqslant \frac{1}{t_0}(e^{-1} - x)}$$

Puis en intégrant de nouveau entre x et e^{-1}

$$0 \leqslant -g(e^{-1}) + g(x) = \int_x^{e^{-1}} -g'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{e^{-1}} \frac{1}{t_0}(e^{-1} - t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t_0}\left[\frac{(e^{-1} - t)^2}{2}\right]_x^{e^{-1}} = \frac{(e^{-1} - x)^2}{2t_0}$$

Donc, en prenant des valeurs absolues :

$$\boxed{|g(x) - g(e^{-1})| \leqslant \frac{|x - e^{-1}|^2}{2t_0}}$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après 3), $t_n \in I = [t_0, e^{-1}]$. Donc, d'après 4), avec $x = t_n$,

$$|t_{n+1} - e^{-1}| = |g(t_n) - g(e^{-1})| \leqslant \frac{|t_n - e^{-1}|^2}{2t_0}$$

Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad |t_n - e^{-1}| \leqslant 2t_0 \left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^n}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ est immédiate.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. D'après ci-dessus,

$$|t_{n+1} - e^{-1}| \leqslant \frac{(t_n - e^{-1})^2}{2t_0}$$

Donc en appliquant l'hypothèse de récurrence :

$$|t_{n+1} - e^{-1}| \leqslant \frac{1}{2t_0}\left(2t_0\left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^n}\right)^2 = \frac{(2t_0)^2}{2t_0}\left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^n \times 2} = 2t_0\left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^{n+1}}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad |t_n - e^{-1}| \leqslant 2t_0 \left(\dfrac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^n}}$

6) Comme $t_0 \in \left]\dfrac{e^{-1}}{3}, e^{-1}\right[$, $|t_0 - e^{-1}| \leqslant \dfrac{2}{3}e^{-1} \leqslant e^{-1} < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{e^{-1} - t_0}{2t_0}\right)^{2^n} = 0$.

D'après 5), par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} |t_n - e^{-1}|$ existe et égal 0.

En conclusion $\boxed{\text{La suite } (t_n)_n \text{ converge vers } e^{-1}}$

7) **a)** Pour tout $x \in]0,1]$, posons

$$f(x) = x^{-x} = e^{-x\ln x} = e^{-g(x)}$$

La fonction f est continue sur $]0,1]$, prolongeable en 0 par $f(0) = \lim\limits_{x\to0} f(x) = 1 = e^{-g(0)}$, car g est continue en 0 d'après 1). Ainsi,

$$\boxed{I \text{ est une intégrale convergente}}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de R_n dans la partie 1,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad e^t = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} + R_n(t)$$

En évaluant en $t = -g(x)$, il vient

$$\forall x \in [0,1] \qquad f(x) = e^{-g(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-g(x))^k}{k!} + R_n(-g(x))$$

Puis en intégrant entre 0 et 1, par linéarité de l'intégrale,

$$I = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 \frac{(-1)^k g^k(x)}{k!} \,\mathrm{d}x + \int_0^1 R_n(-g(x)) \,\mathrm{d}x$$

Ainsi, en posant $\boxed{\widetilde{R}_n(x) = R_n(-x\ln x)}$ pour $x \in]0,1]$,

$$\boxed{I = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^k \ln^k x \,\mathrm{d}x + \int_0^1 \widetilde{R}_n(x) \,\mathrm{d}x}$$

c) Pour tout $x \in]0,1]$, $-g(x) \geqslant 0$ d'après 2). Donc on peut évaluer l'inégalité trouvée en 1)1)e) pour $t = -g(x) \geqslant 0$:

$$\forall x \in]0,1] \qquad |\widetilde{R}_n(x)| = |R_n(-g(x))| \leqslant \frac{(-g(x))^{n+1}e^{-g(x)}}{(n+1)!}$$

Or $0 \leqslant -g(x) \leqslant e^{-1}$. Ainsi, par croissance de exp et $t \mapsto t^{n+1}$ sur $\mathbb{R}_+$, comme $1/(n+1)! \leqslant 1$, il vient

$$\forall x \in]0,1] \qquad |\widetilde{R}_n(x)| \leqslant \frac{e^{-(n+1)}e^{e^{-1}}}{(n+1)!} \leqslant \frac{e^{1/e}}{e^{n+1}}$$

Et finalement, en intégrant entre 0 et 1,

$$\boxed{\left|\int_0^1 \widetilde{R}_n(x) \,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{e^{1/e}}{e^{n+1}}}$$

d) **i)** Soit $g_{p,q}(x) = x^p \ln^q x$ pour $x \in]0,1]$. La fonction $g_{p,q}$ est continue sur $]0,1]$ comme composée de fonctions continues. Par croissance comparée, comme $p > 0$, $\lim\limits_{x\to0} g_{p,q}(x) = 0$. Donc $g_{p,q}$ est prolongeable par continuité en $x = 0$ par $g_{p,q}(0) = 0$.

Conclusion : $\boxed{I_{p,q} \text{ est une intégrale convergente}}$

ii) Soit $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ fixés. Soit $X \in]0,1]$. Procédons à une intégration par partie sur $[X,1]$:

$$\int_X^1 x^p \ln^q x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\ln^q x\right]_X^1 - \int_X^1 \frac{x^{p+1}}{p+1}\,\frac{q}{x}\ln^{q-1} x \,\mathrm{d}x$$

Or $q > 0$ donc $\ln^q(1) = 0$ et

$$\int_X^1 x^p \ln^q x \,\mathrm{d}x = \frac{g_{p+1,q}(X)}{p+1} - \frac{q}{p+1}\int_X^1 x^p \ln^{q-1} x \,\mathrm{d}x$$

En passant à la limite pour $X \to 0$, il vient $I_{p,q} = -\dfrac{q}{p+1} I_{p,q-1}$. Conclusion :

$$\boxed{\forall (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}}$$

iii) *Une question simple : on vous donne une formule de récurrence, il faut déterminer la formule en fonction de p et q. Vous testez pour les premier termes, vous conjecturez (toujours au brouillon) puis vous montrez par récurrence. C'est toujours sur le même modèle, et il n'est pas du tout nécessaire d'avoir fait ou compris les questions précédentes.*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_q : \quad I_{p,q} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}$$

est vraie pour tout $q \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: $I_{p,0} = \displaystyle\int_0^1 x^p \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1} = \frac{(-1)^0 0!}{(p+1)^{0+1}}$. Donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_q \Longrightarrow \mathcal{H}_{q+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_q$ vraie. D'après ii),

$$I_{p,q+1} = -\frac{q+1}{p+1} I_{p,q} = -\frac{q+1}{p+1}\,\frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}} = \frac{(-1)^{q+1}(q+1)!}{(p+1)^{q+2}}$$

  Donc $\mathcal{H}_{q+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall q \geqslant 0 \qquad I_{p,q} = \dfrac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}}$

e) D'après 7)b), avec $I_{0,0} = \displaystyle\int_0^1 1 \,\mathrm{d}x = 1$,

$$I = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} I_{k,k} + \int_0^1 \widetilde{R}_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Or d'après 7)d)iii) $I_{k,k} = \dfrac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}}$ pour tout $k > 0$. Ainsi,

$$I = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(-1)^k k!}{k!(k+1)^{k+1}} + \int_0^1 \widetilde{R}_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^{k+1}} + \int_0^1 \widetilde{R}_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Or d'après 7)c),

$$\left|\int_0^1 \widetilde{R}_n(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{e^{1/e}}{e^{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc par majoration, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \widetilde{R}_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Ainsi $I = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^{k+1}}$, c'est-à-dire

$$\boxed{I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}}$$

Partie 3

1) Dans les conditions posées par l'énoncé :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b \varphi(t)\mathrm{d}t$$

Les bornes du $\sum$ peuvent être décalées d'un nombre de termes constant par rapport à n sans changer le résultat, on peut par exemple sommer de 1 à n ou de 0 à n au lieu de 0 à $n-1$ ...

2) En prenant $a=0$, $b=1$ et $\varphi : t\mapsto \ln(1+t)$, le résultat de la question précédente donne :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\ln(1+t)\,\mathrm{d}t=\left[(1+t)\ln(1+t)-(1+t)\right]_0^1=2\ln(2)-1$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=2\ln(2)-1}$$

3) Notons $x_n=\left(\dfrac{4^n n^n n!}{(2n)!}\right)^{1/n}$. Et calculons :

$$\begin{aligned}
\ln(x_n) &= \frac{1}{n}\ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{n}4nk}{\prod_{k=1}^{2n}k}\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(4nk)-\sum_{k=1}^{2n}\ln(k)\right)\\
&= 2\ln(2)+\ln(n)+\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(k)-\sum_{k=1}^{2n}\ln(k)\right)\\
&= 2\ln(2)+\ln(n)-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}\ln(k)\right)\\
&= 2\ln(2)+\ln(n)-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(k+n)\right)\\
&= 2\ln(2)-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+n)-\ln(n))\right)\\
&= 2\ln(2)-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{k}{n})\right)
\end{aligned}$$

D'après la question précédente $(\ln(x_n))$ tend vers 1 et donc, comme la fonction exponentielle est continue, (x_n) tend vers e. Conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4^n n^n n!}{(2n)!}\right)^{\frac{1}{n}}=e}$$

FIN DE L'ÉPREUVE