

Épreuve de Mathématiques 1

Correction

Exercice 1 (ESSEC 2010, B/L)

Partie 1

Construisons l'inverse : pour tout $y \in \mathbb{R} - \{1\}$, on pose

$$g(y) = \frac{1}{y-1}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(f(x)) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}-1} = x$, et pour tout $y \in \mathbb{R} - \{1\}$, $f(g(y)) = 1 + \dfrac{1}{\frac{1}{y-1}} = y$.

Conclusion : $\boxed{f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} - \{1\} \text{ est bijective d'inverse } f^{-1}(y) = \dfrac{1}{y-1}}$

Il faut vérifier $f \circ g$ et $g \circ f$. Ne pas appeler g « f^{-1} » avant de l'avoir montré.

Partie 2

1) a) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u(P) &= X^2\left(a\Big(1+\frac{1}{X}\Big)^2 + b\Big(1+\frac{1}{X}\Big) + c\right) \\ &= X^2\left(a\Big(1+\frac{2}{X}+\frac{1}{X^2}\Big) + b + \frac{b}{X} + c\right) \\ &= aX^2 + 2aX + a + bX^2 + bX + cX^2 \\ &= \boxed{(a+b+c)X^2 + (2a+b)X + a} \end{aligned}$$

Finalement, avec les notations de l'énoncé, $\boxed{\alpha = a+b+c,\ \beta = 2a+b \text{ et } \gamma = a}$

b) Vu qu'après simplification la fraction rationnelle $u(P)$ est un polynôme, il suffit d'évaluer en 0 :

$$\boxed{\lim_{x\to 0} u(P)(x) = a = P(0)}$$

2) En prenant un équivalent en 0, il vient $\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)^k \sim \dfrac{1}{x^k}$, puis pour la fraction rationnelle $u(P)(x)$, en notant $d = \deg P$,

$$u(P)(x) = x^n\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^k\right) \sim x^n\left(a_d\frac{1}{x^d}\right) = a_d x^{n-d}$$

Donc la limite $\lim\limits_{x\to 0} u(P)(x)$ existe et $\boxed{\ell = a_n}$

3) *Dans « endomorphisme » il y a deux choses à montrer : « endo », on arrive dans le même espace que l'espace de départ ; et « morphisme », c'est une application linéaire.*

Par linéarité de l'évaluation, il vient $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$u(\lambda P + Q) = X^n(\lambda P + Q)\Big(1+\frac{1}{X}\Big) = X^n\left(\lambda P\Big(1+\frac{1}{X}\Big) + Q\Big(1+\frac{1}{X}\Big)\right) = \lambda u(P) + u(Q)$$

Donc u est linéaire.

De plus, en développant par la formule du binôme, $P\Big(1+\dfrac{1}{X}\Big)$ est un polynôme en $\dfrac{1}{X}$, de degré au plus n :

$$P\Big(1+\frac{1}{X}\Big)=\sum_{k=0}^{n} b_k \frac{1}{X^k}$$

Par conséquent, $u(P)=X^nP\Big(1+\dfrac{1}{X}\Big)=X^n\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^{-k}=\sum_{k=0}^{n} b_k X^{n-k}\in\mathbb{R}_n[X]$

Finalement, $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[x]}$

Partie 3

On notera M_n la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.

1)
$$\begin{array}{lclcl}
u(1) & = & X^3\times 1 = X^3 & = & 0\times 1+0\times X+0\times X^2+1\times X^3\\
u(X) & = & X^3\times\Big(1+\dfrac{1}{X}\Big)=X^3+X^2 & = & 0\times 1+0\times X+1\times X^2+1\times X^3\\
u(X^2) & = & X^3\times\Big(1+\dfrac{1}{X}\Big)^2=X^3\Big(1+\dfrac{2}{X}+\dfrac{1}{X^2}\Big) & = & 0\times 1+1\times X+2\times X^2+1\times X^3\\
u(X^3) & = & X^3\times\Big(1+\dfrac{1}{X}\Big)^3=X^3\Big(1+\dfrac{3}{X}+\dfrac{3}{X^2}+\dfrac{1}{X^3}\Big) & = & 1\times 1+3\times X+3\times X^2+1\times X^3
\end{array}$$

Finalement, $\boxed{M_3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&3\\0&1&2&3\\1&1&1&1\end{pmatrix}}$

En permutant les colonnes, on change le signe du déterminant :

$$\det M_3=(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&1&0&0\\3&2&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}=1$$

car le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des termes diagonaux. Ainsi, $\boxed{M_3 \text{ est inversible}}$

2) *On peut aussi développer avec la formule du binôme $P\Big(1+\dfrac{1}{X}\Big)$ et résoudre le système (de taille $n+1$) obtenu. Comme il est triangulaire, c'est faisable.*

Soit $P\in\operatorname{Ker} u$. Montrons que $P=0$.

Comme $u(P)=0$, alors $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $u(P)(x)=x^nP\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)=0$, c'est-à-dire $P\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)=0$.

Or lorsque x parcourt $\mathbb{R}^*$, $1+\dfrac{1}{x}$ prend une infinité de valeurs (très précisément $\mathbb{R}-\{1\}$, *cf.* partie 1).

Donc le polynôme P a une infinité de racines : $P=0$.

Ainsi, $\boxed{\operatorname{Ker} u=\{0\}}$

Donc u est un endomorphisme injectif. Or $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie ($\dim\mathbb{R}_n[X]=n+1$), donc

$$\boxed{u \text{ est bijectif}}$$

3) En rentrant X^n dans la somme, puis X^k dans la parenthèse, on trouve

$$u(P)=X^n\sum_{k=0}^{n} a_k\Big(1+\frac{1}{X}\Big)^k=\sum_{k=0}^{n} a_kX^{n-k}X^k\Big(1+\frac{1}{X}\Big)^k=\sum_{k=0}^{n} a_kX^{n-k}(X+1)^k=\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_kQ_k}$$

Montrons que $(Q_0,\dots,Q_n)$ est libre. Soit $(a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kQ_k=0$.

D'après ci-dessus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kQ_k=u(P)$, si on note $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$. Donc $P\in\operatorname{Ker} u$.

Or d'après 2), $\operatorname{Ker} u = \{0\}$. D'où $P = 0$, c'est-à-dire $a_0 = \cdots = a_n = 0$.
Finalement, $\boxed{\text{La famille } (Q_0, \ldots, Q_n) \text{ est libre.}}$

4) La famille $(Q_0, \ldots, Q_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est libre d'après la question 3),
de plus $\operatorname{Card}((Q_0, \ldots, Q_n)) = n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, donc

$$\boxed{(Q_0, \ldots, Q_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$$

5) Soit $j \in \{1, \ldots, n+1\}$. À l'aide de la formule du binôme,

$$u(X^{j-1}) = X^n\Big(1 + \frac{1}{X}\Big)^{j-1} = X^n \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} 1^k \times \Big(\frac{1}{X}\Big)^{j-1-k} = \boxed{\sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} X^{n-j+1+k}}$$

6) D'après 5), en posant $i - 1 = n - j + 1 + k$ et donc $k = i + j - 2 - n$,

$$u(X^{j-1}) = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} X^{n-j+1+k} = \sum_{i=n-j+1}^{n+1} \binom{j-1}{i+j-2-n} X^{i-1}$$

Donc le coefficient situé sur la ligne i et la colonne j de M_n, qui correspond au coefficient devant X^{i-1} dans le polynôme $u(X^{j-1})$, est

$$\boxed{\binom{j-1}{i+j-2-n}}$$

avec la convention $\displaystyle\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$, donc ici lorsque $i \leqslant n - j$.

7) Soit x un réel différent de 1, et $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$u(P)(f^{-1}(x)) = u(P)\Big(\frac{1}{x-1}\Big) = \left(\frac{1}{x-1}\right)^n P\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{x-1}}\right) = \boxed{\frac{1}{(x-1)^n} P(x)}$$

8) En poursuivant le calcul de la question précédente : $P(x) = (x-1)^n u(P)(f^{-1}(x))$ pour tout $x \neq 1$.

Ainsi, notons , pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, $\boxed{v(Q) = (X-1)^n Q\Big(\dfrac{1}{X-1}\Big)}$

Par un raisonnement sur le degrée de Q, de même qu'à la question 3 de la partie 2, il vient $v(Q) \in \mathbb{R}_n[X]$.
De plus, $\forall x \neq 1$, $v(u(P))(x) = P(x)$, puis par continuité $v(u(P)) = P$. Ainsi $v \circ u = \mathrm{id}$.
Or u est bijectif, donc $\boxed{u^{-1} = v}$

9) On développe : $v(X^j) = (X-1)^n \dfrac{1}{(X-1)^j} = (X-1)^{n-j} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-j} (-1)^{n-j-i} \binom{n-j}{i} X^i.$

Ainsi le coefficient a_{ij} de la matrice de $v = u^{-1}$ dans la base $\mathscr{B}$ est $\boxed{(-1)^{n-j-i+2}\dbinom{n-j+1}{i} - 1}$

(On décale i et j de 1 puisqu'on commence à 1 au lieu de 0).

Exercice 2 (PT A 2011)

Partie 1

1) Une condition nécessaire et suffisante pour que $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ soit inversible est que $\boxed{\det A \neq 0}$.

Comme $(\det A)(\det A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det I_n = 1$, $\boxed{\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}}$

2) On sait que si $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est inversible, son inverse est égale à :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}{}^t\widetilde{A}$$

où $\widetilde{A}$ désigne la matrice des cofacteurs de A.

Dans le cas 2×2, si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, cette formule s'écrit : $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

On applique cette formule aux trois cas proposés. On trouve :

$$\boxed{A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} ;\ A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} ;\ A_3^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}}$$

3) Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$;

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que A est inversible et que $A^{-1} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$. Par conséquent, $\det(A)$ et $\det(A^{-1})$ sont deux entiers. Or $\det(A) = \dfrac{1}{\det(A^{-1})}$, donc est un entier qui peut s'écrire comme l'inverse d'un entier. : les seules valeurs possibles sont $\det(A) = 1$ ou $\det(A) = -1$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $\det(A) \in \{-1, 1\}$. Donc A est inversible en tant que matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et en inversant A on trouve $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}}$.

Or $\det(A) \in \{-1, 1\}$ donc $\dfrac{1}{det(A)}$ est entier, par conséquent $A^{-1} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$.

Conclusion : $\boxed{\text{La matrice } A \text{ est inversible dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}) \text{ si et seulement si } \det(A) \in \mathbb{Z}^{\times}.}$

4) Soit $(b, c) \in \mathbb{Z}^2$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 5 & c \\ b & 1 \end{pmatrix}$. tels que $\det(A_4) = 5 - bc = 1$. C'est-à-dire tels que $bc = 4$. Les seules possibilités sont donc

$$\boxed{\{(1, 4), (2, 2), (4, 1), (-1, -4), (-2, -2), (-4, -1)\}}$$

Partie 2

1) L'entier p est non nul, donc supérieur ou égal à 1 : $p - 1 \in \mathbb{N}$, et on peut écrire A^{p-1} sans hypothèse sur A. Par définition,

$$A^{p-1}A = AA^{p-1} = A^p = I_2$$

Donc, comme $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ est un anneau, $\boxed{A \text{ est inversible d'inverse } A^{-1} = A^{p-1} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z}).}$

D'après 1.3), $\boxed{\text{les valeurs possibles de } \det A \text{ sont } -1 \text{ et } 1.}$

2) $(A^{-1})^p = (A^p)^{-1} = I_2$, donc $\boxed{A^{-1} \in C_2(\mathbb{Z})}$.

Par définition, $h(A^{-1})$ est le plus petit entier q vérifiant $(A^{-1})^q = I_2$, donc $h(A^{-1}) \leqslant p = h(A)$. En appliquant ce résultat à A^{-1}, on trouve $h((A^{-1})^{-1}) \leqslant h(A^{-1})$. Or $(A^{-1})^{-1} = A$, donc $\boxed{h(A) = h(A^{-1})}$.

3) On peut remarquer que $\lambda = 0$ nous donne tout de suite $\chi_A(0) = \det(A)$.

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} a - \lambda & c \\ b & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - \mathrm{Tr}\,(A)\lambda + \det(A)$$

Ce résultat reste vrai pour $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, mais aussi sous la forme suivante dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: $\chi_A(\lambda) = (-\lambda)^n + \mathrm{Tr}\,(A)(-\lambda)^{n-1} +$ [autres coeff] $+ \det(A)$

Exercice 3 (TPC 2007, exercice)

1) **a)** *Remarque préliminaire : j est une racine 3-ième de l'unité, c'est-à-dire une solution de $X^3 = 1$ ($\boxed{j^3 = 1}$). Cette équation s'écrit aussi $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1) = 0$. Puisque $j \neq 1$, j est forcément racine de $X^2 + X + 1$ (pour que le produit soit nul) : $\boxed{j^2 + j + 1 = 0}$.* Soit $p \in \mathbb{N}$.

- $\underline{k=3p}$: $j^k = (j^3)^p = 1$ donc $S(3p) = 3$.
- $\underline{k=3p+1}$: $S(3p+1) = 1 + (j^3)^p j + (j^3)^{2p} j^2 = 1 + j + j^2 = 0$.
- $\underline{k=3p+2}$: $S(3p+2) = 1 + (j^3)^p j^2 + (j^3)^{2p} j^4 = 1 + j^2 + j^3 j = 1 + j^2 + j = 0$.

Conclusion : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, \quad S(3p) = 3 \text{ et } S(3p+1) = S(3p+2) = 0}$

b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de la forme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

$$P(X)+P(jX)+P(j^2X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{k=0}^{n} a_k j^k X^k + \sum_{k=0}^{n} a_k (j^2)^k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(1 + j^k + (j^2)^k\right) X^k$$

On pose $N = E(n/3)$, la partie entière de $n/3$ (donc $n = 3N$, $n = 3N+1$ ou $n = 3N+2$). D'après le résultat de la question 1)a), $\boxed{P(X) + P(jX) + P(j^2X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k S(k) X^k = \sum_{p=0}^{N} 3a_{3p} X^{3p}}$.

2) **a)** $R_k(X) = (X-k)(jX-k)(j^2X-k) = X^3 - k(1+j+j^2)X^2 + k^2(1+j+j^2)X - k^3 = X^3 - k^3$

(Sans calculs : les racines de $R_k(X)$ sont k, jk et j^2k, c'est-à-dire exactement les solutions de $X^3 = k^3$, donc $R_k(X) = \alpha(X^3 - k^3)$.)

b) $T = R_1R_2R_3R_4$, où R_k est le polynôme de la question précédente. Comme R_k est un polynôme en X^3, $\boxed{T \text{ est un polynôme en } X^3}$.

Surtout, éviter de développer le polynôme T de degré 12...

c) $T = R_1R_2R_3R_4$ donc $T(X) = (X^3-1)(X^3-2^3)(X^3-3^3)(X^3-4^3)$.

Ainsi, avec $\boxed{H(Y) = (Y-1)(Y-2^3)(Y-3^3)(Y-4^3)}$, $H(X^3) = T(X)$.

Les racines de H sont 1, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$ et $4^3 = 8^2 = 64$.

d) Méthode directe :

$$\begin{aligned} T(X) = 0 &\iff Q(X) = 0 \quad \text{ou} \quad Q(jX) = 0 \quad \text{ou} \quad Q(j^2X) = 0 \\ &\iff X = 1,2,3 \text{ ou } 4 \quad \text{ou} \quad jX = 1,2,3 \text{ ou } 4 \quad \text{ou} \quad j^2X = 1,2,3 \text{ ou } 4 \quad \text{ou} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{1}{j} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \overline{j} = j^2$, et $\dfrac{1}{j^2} = j$, donc en divisant par j et par j^2 les équations ci-dessus, on trouve que les racines de T sont

$$\boxed{\{1,2,3,4,j^2,2j^2,3j^2,4j^2,j,2j,3j,4j\}}$$

Seconde méthode : D'après 2)c), $T(X) = H(X^3)$, donc

$$T(X) = 0 \iff H(X^3) = 0 \iff X^3 = 1, 2^3, 3^3 \text{ ou } 4^3$$

En résolvant chacune des équations $X^3 = a$ ci-dessus, on trouve

$$\boxed{\{1,j,j^2,2,2j,2j^2,3,3j,3j^2,4,4j,4j^2\}}$$

Exercice 4 (EDHEC S 2013)

1) **a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1-n}{n(n+1)} = \dfrac{1}{a_n}$.

Ainsi on reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

En conclusion $\boxed{\text{La série de terme général } \dfrac{1}{a_n} \text{ converge et } \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a_k} = 1}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k}$, or

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{6}(2n+1+3) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\end{aligned}$$

Finalement, $u_n = \dfrac{n}{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}} = \boxed{\dfrac{3}{(n+1)(n+2)}}$

c) D'après le b), $u_n = \dfrac{3}{a_{n+1}}$ donc la somme télescopique est celle du 1)a) avec des bornes différentes :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{a_{k+1}} = 3\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{a_k} = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{2}$$

Ainsi, $\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge et } \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{3}{2}}$

D'après 1)c), $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{3}{2}$, et d'après 1)a), $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = 1$. Or $\dfrac{3}{2} \leqslant 2$. Conclusion :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}}$$

2) **a)**
```
def facto_rec(n):
  if n == 0:
    return 1
  else:
    return facto_rec(n-1)*n
```
(Moralement il faudrait un `assert n >=0` *ou autre pour éviter un problème de terminaison en cas de* `facto_rec(-1)`*).*

b) La suite (a_n) est positive donc, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant a_n = n!$. Par conséquent

$$u_n = \frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k} \leqslant \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}}$

Dans ce genre de question, il faut vraiment chercher un stylo à la main : écrire ce qu'on cherche, traduire u_n (avec des pointillés : $a_1 + \cdots + a_n$), essayer de simplifier (passer à l'inverse : les sommes au dénominateur, bof). **Ensuite***, les idées viennent.*

c) Comme $u_n \geqslant 0$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$, où $\dfrac{1}{(n-1)!}$ est le terme général d'une série convergente.

Ainsi, par majoration, $\boxed{\text{La série de terme général } u_n \text{ converge}}$

De plus, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n-1)!} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a_n}$.

Donc, a fortiori, et en passant à la limite,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}}$$

3) (H.P.) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $a_k > 0$ pour tout k, on pose $\overrightarrow{u} = (\sqrt{a_1}, \dots, \sqrt{a_n})$ et $\overrightarrow{v} = (\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \dots, \frac{n}{\sqrt{a_n}})$. L'inégalité de Cauchy-Schwartz s'écrit :

$$|\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}| \leqslant \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$$

En élevant au carré pour ne plus avoir de racines, il vient :

$$\boxed{(1+2+\dots+n)^2 \leqslant (a_1+a_2+\dots+a_n)\Big(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\dots+\frac{n^2}{a_n}\Big)}$$

4) **a)** *Même remarque qu'en 2)a) : on écrit d'abord le début « évident » du calcul : recopier le résultat précédent, puis le trafiquer pour avoir quelque chose de ressemblant.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après 3), en divisant par $\sum_{k=1}^{n} a_k > 0$, il vient,

$$\frac{(1+2+\dots+n)^2}{a_1+a_2+\dots+a_n} \leqslant \Big(\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\dots+\frac{n^2}{a_n}\Big) = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k} \qquad (1)$$

Or $(1+2+\dots+n)^2 = \Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)^2 > 0$, donc en divisant (1) il vient :

$$\frac{1}{a_1+a_2+\dots+a_n} \leqslant \frac{4}{n^2(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}$$

Comme $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ *(prendre le calcul par les deux bouts)*, l'inégalité précédente s'écrit, après multiplication par $2n+1$,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{2n+1}{a_1+a_2+\dots+a_n} \leqslant 4\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}}$$

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En sommant l'inégalité obtenue en b), on trouve

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{a_1+a_2+\dots+a_n} \leqslant \sum_{n=1}^{N}\left(4\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right)$$

Or, en cassant la somme sur n,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\left(4\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\right) &= 4\left[\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\Big) - \sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\Big)\right] \\
&= 4\left[\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\Big) - \sum_{n=2}^{N+1}\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2}{a_k}\Big)\right] \\
&= 4\left[\frac{1}{a_1} + \underbrace{\sum_{n=2}^{N}\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k}\Big) - \sum_{n=2}^{N}\Big(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2}{a_k}\Big)} - \frac{1}{(N+1)^2}\sum_{k=1}^{N}\frac{k^2}{a_k}\right] \\
&= 4\left[\frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{a_k} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2}{a_k}\right) - \frac{1}{(N+1)^2}\sum_{k=1}^{N}\frac{k^2}{a_k}\right] \\
&= 4\left[\frac{1}{a_1} + \sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^2}\frac{n^2}{a_n} - \underbrace{\frac{1}{(N+1)^2}\sum_{k=1}^{N}\frac{k^2}{a_k}}_{\geqslant 0}\right] \leqslant 4\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{a_n}
\end{aligned}$$

Finalement : $\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant 4\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k}}$

c) Par hypothèse, $\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{a_k}$ converge. Donc d'après b), la suite $V_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ est majorée.
Or, comme $\frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \geqslant 0$, (V_N) est une suite croissante.
C'est une suite croissante majorée, donc convergente :

$$\boxed{\text{La série de terme général positif } \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \text{ converge.}}$$

Or $2u_n = \frac{2n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \leqslant \frac{2n+1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$, donc par majoration $\sum u_n$ converge. De plus, en sommant les inégalités,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}}$$

Exercice 5 (Petites mines, 2009, MPSI, extrait)

1) $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = \frac{3}{e} - 1 > 0$ car $e < 3$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = 3x^{n-1}(n-2x^2)e^{x^2}$$

Les limites se calculent comme dans la partie 1.
Par hypothèse, $n \geqslant 2$ donc $\sqrt{n/2} \geqslant 1$ puis $f_n(\sqrt{n/2}) \geqslant f_n(1) > 0$.

x	0		$\sqrt{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
$f_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f_n	-1	$\nearrow$	$f(\sqrt{n/2}) > 0$	$\searrow$	-1

La fonction f_n est donc continue et strictement croissante sur $[0,1]$, avec $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) > 0$ (d'après 1)). La stricte monotonie et le théorème des valeurs intermédiaires nous permettent de conclure que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $u_n < 1$. De même, f_n continue strictement décroissante sur $[\sqrt{n/2}, +\infty[$, donc $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $v_n > \sqrt{n/2} > 1$.

3) D'après 2), $v_n > \sqrt{n/2}$, or $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n/2} = +\infty$, donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty}$.

4) **a)** Par définition de u_n, $f_n(u_n) = 3u_n^n e^{-u_n^2} - 1 = 0$, donc $\boxed{\exp(-u_n^2) = \frac{1}{3u_n^n}}$.

b) $f_{n+1}(u_n) = 3u_n^{n+1}e^{-u_n^2} - 1 = u_n - 1 < 0$, car $u_n < 1$.

c) D'après 2), u_n et u_{n+1} soit dans $[0,1]$. De plus la fonction f_{n+1} est croissante sur $[0,1]$, donc appliquer f_{n+1} ne change pas l'ordre entre u_n et u_{n+1}.
Si $u_{n+1} < u_n$, alors $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0 < f_{n+1}(u_n) < 0$ (d'après b)), ce qui est absurde. Donc forcément $u_n < u_{n+1}$.
Ceci étant vrai pour tout $n \geqslant 2$, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

d) La suite (u_n) est croissante (c) majorée par 1 (b), donc convergente.

5) **a)** Soit $x > 0$,

$$\begin{aligned} g_n(x) = 0 &\iff \ln 3 + n\ln x - x^2 = 0 \iff \exp(\ln 3 + n\ln x - x^2) = \exp(0) \\ &\iff 3x^n\exp(-x^2) = 1 \iff f_n(x) = 0 \end{aligned}$$

b) D'après la question précédente, $g_n(u_n) = 0$, donc $\ln 3 - u_n^2 = n \ln u_n$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln 3 - u_n^2 = \ln 3 - \ell^2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = \ln(\ell) \neq 0$. Donc le membre de gauche de l'égalité précédente a une limite finie alors que celui de droite a une limite infinie, ce qui est absurde.
Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

c) $g_n(1 + w_n) = g_n(u_n) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ d'après la question précédente. Donc il vient

$$0 = \ln 3 + n \ln(1 + w_n) - (1 + w_n)^2 = \ln 3 + n(w_n + o(w_n)) - 1 - 2w_n = \ln 3 - 1 + nw_n + o(nw_n)$$

Car $w_n = o(nw_n)$: $w_n/(nw_n) = 1/n \to 0$. Ainsi $(1 - \ln 3)/n = w_n + o(w_n)$, et finalement,

$$\boxed{w_n \sim \frac{1 - \ln 3}{n}}$$

FIN DE L'ÉPREUVE