Épreuve de Mathématiques 1

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré au plus n.
On rappelle que la famille $\mathscr{B} = (1, X, \dots, X^n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Les résultats de la partie 1 sont utilisés en fin de partie 3.

Partie 1

Montrer que l'application f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur une partie X de $\mathbb{R}$ que l'on déterminera. On explicitera $f^{-1}(y)$ pour $y \in X$.

Partie 2

Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on pose $u(P) = X^n P\Big(1 + \dfrac{1}{X}\Big)$, où l'on a noté $P\Big(1 + \dfrac{1}{X}\Big)$ le polynôme P évalué en $1 + \dfrac{1}{X}$ (de la même façon que l'on notera $P(2)$ le polynôme P évalué en 2).

1) Dans cette question seulement, on prend $n = 2$.

- **a)** Pour $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer $u(P)$ sous la forme $\alpha X^2 + \beta X + \gamma$ avec α, β et γ réels que l'on exprimera en fonction de a, b et c.
- **b)** Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} u(P)(x)$.

2) Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer la limite $\ell = \lim\limits_{x \to 0} u(P)(x)$.

3) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

Partie 3

On notera M_n la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$.

1) Montrer que $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et montrer que M_3 est inversible.

2) On revient au cas général, $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer Ker u et en déduire que u est bijectif.

3) On pose, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $Q_k(X) = (X+1)^k X^{n-k}$.
Exprimer $u(P)$ à l'aide de $(Q_0, \dots, Q_n)$, puis, en utilisant la question précédente, en déduire que $(Q_0, \dots, Q_n)$ est libre.

4) En déduire que $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5) Exprimer, pour tout $j \in \{1, \dots, n+1\}$, $u(X^{j-1})$ à l'aide de $X^{n-j+1}, X^{n-j+2}, \dots, X^n$.

6) En déduire, pour i et j dans $\{1, \dots, n+1\}$, le coefficient situé sur la ligne i et la colonne j de M_n.

7) Déterminer, pour x réel différent de 1, et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $u(P)(f^{-1}(x))$.

8) En déduire u^{-1}.

9) Déterminer M_n^{-1} (on donnera le coefficient a_{ij} situé sur la ligne i et la colonne j).

Exercice 2

Les parties 1 et 2 sont très largement indépendantes.
On désigne par n un entier naturel strictement supérieur à 1 et H l'un des ensembles de nombres $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$.
On note $\mathscr{M}_n(H)$ l'anneau des matrices carrées de dimension n, à coefficients dans H et on désigne par I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(H)$.

Partie 1

1) À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur son déterminant, une matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est-elle inversible ? Exprimer alors $\det(A^{-1})$ en fonction de $\det(A)$.

2) Déterminer les inverses des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad ; \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

3) Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$; $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$.

Montrer que A admet une matrice inverse A^{-1} et que A^{-1} est, elle aussi, un élément de $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(A) \in \{-1, 1\} = \mathbb{Z}^\times$ (les inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}$).
Donner alors l'expression de A^{-1} en fonction de a, b, c et d.
On notera désormais $SL_2(\mathbb{Z})$ le sous-ensemble de $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ constitué des matrices M telles que $\det(M) = 1$ ($SL_2(\mathbb{Z}) = \det{}^{-1}(\{1\})$).

4) Déterminer les couples $(b, c) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $A_4 = \begin{pmatrix} 5 & c \\ b & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

Partie 2

On appelle *trace* de la matrice A, notée $\operatorname{Tr}(A)$, la somme de ses coefficients diagonaux.
On désignera par $C_2(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$ telles qu'il existe un entier naturel p non nul vérifiant $A^p = I_2$.
Pour chaque matrice A de $C_2(\mathbb{Z})$, on admet qu'il existe un plus petit entier naturel q non nul tel que $A^q = I_2$.
On le note $h(A)$, il est appelé l'ordre de la matrice A.
Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice de $C_2(\mathbb{Z})$, d'ordre $h(A) = p$.

1) Montrer que A admet une matrice inverse A^{-1} appartenant à $\mathscr{M}_2(\mathbb{Z})$. En déduire les valeurs possibles de $\det A$.

2) Vérifier que $A^{-1} \in C_2(\mathbb{Z})$. Comparer $h(A)$ et $h(A^{-1})$.

3) Exprimer $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$ en fonction de $\operatorname{Tr}(A)$ et de $\det(A)$.

Exercice 3

Soit le nombre complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i \sin\dfrac{2\pi}{3}$.

1) **a)** Calculer pour $k = 3p$, $k = 3p + 1$ et $k = 3p + 2$, où $p \in \mathbb{N}$, la valeur de la somme

$$S(k) = 1 + j^k + (j^2)^k$$

b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme à coefficient complexes, de la forme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Calculer $P(X) + P(jX) + P(j^2X)$, on exprimera le résultat en fonction des coefficients a_k de P.
<u>Indication</u> : *On pourra éventuellement distinguer les différents cas : $n = 3N$, $n = 3N + 1$ et $n = 3N + 2$.*

2) **a)** Soit $k \in \mathbb{C}$. Développer et simplifier le polynôme

$$R_k(X) = (X - k)(jX - k)(j^2X - k)$$

b) Soit le polynôme $Q(X) = (X - 1)(X - 2)(X - 3)(X - 4)$. On lui associe le polynôme $T(X) = Q(X)Q(jX)Q(j^2X)$. Montrer que T est un polynôme en X^3.

c) En posant $Y = X^3$, déterminer un polynôme H tel que $H(Y) = T(X)$. Déterminer les racines du polynôme $H(Y)$.

d) Déterminer de deux façons différentes les racines du polynôme T.

Exercice 4

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge : $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{1}{a_n}$ existe et est finie. On note cette limite, appelée « somme de la série », $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_n}$.

Le but de cet exercice est de prouver que la série de terme général $u_n = \dfrac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ converge également et que, de plus, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} \tag{1}$$

1) Étude d'un exemple : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = n(n + 1)$.

a) Vérifier que $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ puis en déduire que la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme.

b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer u_n en fonction de n.

c) Établir la convergence de la série de terme général u_n et donner sa somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$, puis en déduire l'inégalité (1). demandée.

2) Étude d'un deuxième exemple : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = n!$. On admet que la série de terme général $\dfrac{1}{n!}$ converge.

a) (bonus) écrire une fonction Python récursive qui calcule $n!$

b) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$.

c) En déduire que la série de terme général u_n converge et que l'on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 2 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_n}$

On revient au cas général

3) Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad (1 + 2 + \cdots + n)^2 \leqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\Big(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \cdots + \frac{n^2}{a_n}\Big)$$

4) **a)** Utiliser le résultat précédent pour établir que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant 4\Big(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\Big) \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{a_k}$$

b) En déduire, par sommation, que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n=1}^{N} \dfrac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leqslant 4 \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{1}{a_k}$

c) Montrer enfin que la série de terme général $\dfrac{2n+1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ converge puis établir le résultat (1) demandé.

Exercice 5

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = 3x^n \exp(-x^2) - 1$.

1) Quel est le signe de $f_n(0),\ f_n(1)$?

2) Étudier les variations de f_n sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Donner la limite de f_n au voisinage de $+\infty$. En déduire que f_n s'annule sur $[0, +\infty[$ en deux réels notés u_n et v_n qui vérifient $u_n < 1 < v_n$.

3) Quelle est la limite de (v_n) ?

4) Étude de (u_n).

- **a)** Calculer $\exp(-u_n^2)$ en fonction de u_n^n.
- **b)** En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$.
- **c)** Déduire de ce qui précède la monotonie de (u_n).
- **d)** Montrer que (u_n) converge. On note ℓ sa limite.

5) Soit g_n définie sur $]0, +\infty[$ par $\forall x > 0,\ g_n(x) = \ln 3 + n \ln x - x^2$.

- **a)** Soit $x > 0$, montrer que $g_n(x) = 0$ si et seulement si $f_n(x) = 0$.
- **b)** On suppose que $\ell \neq 1$. Trouver une contradiction en utilisant ce qui précède. Conclure.
- **c)** Soit (w_n) la suite définie par $\forall n \geqslant 2\ w_n = u_n - 1$.
  Trouver en utilisant un développement limité de $g_n(1 + w_n) = g_n(u_n)$ un équivalent simple de w_n.

FIN DE L'ÉPREUVE