

Épreuve de Mathématiques 1

Correction

Exercice 1

1) a) *On pouvait montrer que $\mathscr{F}$ était non vide et stable par combinaison linéaire, ou le voir comme un* Vect *.*

Pour tout triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 & c \\ 0 & 2c & 0 \\ c & 0 & c \end{pmatrix} = aI_3 + bJ + cK$$

Donc $\boxed{\mathscr{F} = \operatorname{Vect}(I_3, J, K) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).}$

b) La famille (I_3, J, K) est génératrice de $\mathscr{F}$ d'après 1)a), montrons qu'elle est libre :
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $aI_3 + bJ + cK = 0$. Comme

$$aI_3 + bJ + cK = M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}$$

La première ligne nous donne $b = 0$ et $c = 0$, puis $a + c = a = 0$. Donc la famille est libre.
La famille (I_3, J, K) est libre et génératrice de $\mathscr{F}$, donc $\boxed{(I_3, J, K) \text{ est une base de } \mathscr{F}.}$

Ainsi, $\boxed{\dim \mathscr{F} = 3}$

2) a) On trouve $J^2 = K$ et $J^3 = 2J$

b) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad J^{2k+1} = 2^k J$$

est vraie pour tout $k \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie. D'après $\mathcal{H}_k$ puis ci-dessus,

$$J^{2(k+1)+1} = J^{2k+1}J^2 = 2^k J J^2 = 2^{k+1} J$$

  Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall k \geqslant 0 \qquad J^{2k+1} = 2^k J}$

On vous demande une récurrence. Vous faites une récurrence. Sans écrire non plus un roman.

c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{J^{2k+2} = J^{2k+1}J = 2^k JJ = 2^k K}$ d'après ci-dessus.

d) $\boxed{\subset}$ Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Quitte à rajouter un a_{n+1} nul, on peut supposer $n = 2N$ pair.
D'après b) et c),

$$P(J) = a_0 I_3 + \sum_{k=0}^{N-1} a_{2k+1} 2^k J + \sum_{k=0}^{N-1} a_{2k+2} 2^k K$$

Donc $P(J) \in \operatorname{Vect}(I_3, J, K) = \mathscr{F}$. Par conséquent $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$.
$\boxed{\supset}$ Réciproquement, $\mathbb{R}_3[J] \subset \mathscr{G}$, et d'après a) $R_3[J] = \operatorname{Vect}(I_3, J, K) = \mathscr{F}$. Donc $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$.
Conclusion : $\boxed{\mathscr{G} = \mathscr{F}}$

e) Soit $\varphi_J : \mathbb{R}[X] \to \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par $\varphi_J(P) = P(J)$. C'est le morphisme d'anneau d'évaluation en $X = J$. Comme $\mathbb{R}[X]$ est un anneau commutatif, $\boxed{\text{Im } \varphi_J = \mathscr{G} = \mathscr{F} \text{ est aussi un anneau commutatif.}}$

On pouvait aussi le montrer à la main, sans utiliser le reste de la question 2). Pour ne pas trop souffrir pour la commutativité, on peut se contenter de montrer que I_3, J et K commutent.

3) a) On calcule A^2 et A^3. Laissé au lecteur.

b) Comme $A = I_3 + J$ et que I_3 et J commutent, en utilisant la formule du binôme,

$$\begin{array}{rcl} P_A(A) & = & (I_3+J)^3 - 3(I_3+J)^2 + I_3 + J + I_3 \\ & = & (I_3 + 3J + 3J^2 + J^3) - 3(I_3 + 2J + J^2) + I_3 + J + I_3 \\ & = & (1-3+1+1)I_3 + (3-6+1)J + (3-3)J^2 + 2J = 0 \qquad \text{(d'après 2)a), } J^3 = 2 \end{array}$$

Conclusion : $\boxed{P_A(A) = 0}$

c) On cherche une matrice B telle que $AB = BA = I_3$. Or $P_A(A) = 0$, donc $-A^3 + 3A^2 - A = I_3$. Ainsi,

$$A(-A^2 + 3A - I_3) = (-A^2 + 3A - I_3)A = I_3$$

Donc $\boxed{\text{La matrice } A \text{ est inversible d'inverse } A^{-1} = -A^2 + 3A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$

On peut montrer par cette méthode que l'inverse d'une matrice M est toujours un polynôme en M.

d) i) On effectue la division euclidienne du polynôme X^p par le polynôme $P_A \neq 0$:
Il existe un polynôme Q et un polynôme R de degré $\deg R < \deg P_A = 3$ tels que

$$X^p = P_A(X)Q(X) + R(X)$$

C'est-à-dire qu'il existe un polynôme Q et des réels α_p, β_p et γ_p tels que

$$X^p = P_A(X)Q(X) + \alpha_p X^2 + \beta_p X + \gamma_p$$

ii) Comme $P_A(1) = 0$, 1 est racine évidente et $P_A = (X-1)(X^2 - 2X - 1)$. Les deux autres racines sont donc $1 \pm \sqrt{2}$.

Ainsi $\boxed{\text{Les racines de } P_A \text{ sont } 1,\ 1+\sqrt{2} \text{ et } 1-\sqrt{2}.}$

iii) *Il faut évaluer en les racines. Bon, ok, normalement dans un vrai sujet les calculs sont plus simples. Mais ils étaient faisables, même de façon « artisanale », certains les ont fait.*

Si $x_0 \in \{1, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\}$, $P_A(x_0) = 0$ et l'égalité trouvée à la question i) s'écrit :

$$x_0^p = \alpha_p x_0^2 + \beta_p x_0 + \gamma_p$$

On obtient donc le système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 1 & = & \alpha_p & + & \beta_p & + & \gamma_p \\ (1+\sqrt{2})^p & = & (3+2\sqrt{2})\alpha_p & + & (1+\sqrt{2})\beta_p & + & \gamma_p \\ (1-\sqrt{2})^p & = & (3-2\sqrt{2})\alpha_p & + & (1-\sqrt{2})\beta_p & + & \gamma_p \end{array} \right.$

Le résoudre revient à inverser la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3+2\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} & 1 \\ 3-2\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$.

Après calculs (pivot de gauss par exemple), $B^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -2+\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} \\ 2 & 1-\sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

(Entraînez-vous à faire faire les calculs, simplifications comprises, par Maple.)

D'où $\begin{pmatrix}\alpha_p\\ \beta_p\\ \gamma_p\end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix}1\\ (1+\sqrt{2})^p\\ (1-\sqrt{2})^p\end{pmatrix}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl}\alpha_p & = & \dfrac{1}{4}\left(-2+(1+\sqrt{2})^p+(1-\sqrt{2})^p\right)\\ \beta_p & = & \dfrac{1}{4}\left(4+(-2+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^p-(2+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^p\right)\\ \gamma_p & = & \dfrac{1}{4}\left(2+(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^p+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^p\right)\end{array}\right.}$$

Le calcul était faisable et a été fait par certains.

iv) D'après i), $A^p = P_A(A)Q(A)+\alpha_pA^2+\beta_pA+\gamma_pI_3$. Or d'après a), $P_A(A)=0$. Il reste

$$A^p = \alpha_pA^2+\beta_pA+\gamma_pI_3$$

Donc en remplaçant A^k, α_p, β_p et γ_p par leurs expressions, il vient

$$\boxed{A^p = \begin{pmatrix}\dfrac{2+(1+\sqrt{2})^p+(1-\sqrt{2})^p}{4} & \dfrac{(1+\sqrt{2})^p-(1-\sqrt{2})^p}{2\sqrt{2}} & \dfrac{-2+(1+\sqrt{2})^p+(1-\sqrt{2})^p}{4}\\ \dfrac{(1+\sqrt{2})^p-(1-\sqrt{2})^p}{2\sqrt{2}} & \dfrac{(1+\sqrt{2})^p+(1-\sqrt{2})^p}{2} & \dfrac{(1+\sqrt{2})^p-(1-\sqrt{2})^p}{2\sqrt{2}}\\ \dfrac{-2+(1+\sqrt{2})^p+(1-\sqrt{2})^p}{4} & \dfrac{(1+\sqrt{2})^p-(1-\sqrt{2})^p}{2\sqrt{2}} & \dfrac{2+(1+\sqrt{2})^p+(1-\sqrt{2})^p}{4}\end{pmatrix}}$$

On peut remarquer que $A^2 = M(1,2,1)$, $A = M(1,1,0)$ et l'application M est linéaire, donc $A^p = M(\alpha_p+\beta_p+\gamma_p, 2\alpha_p+\beta_p, \alpha_p)$. Or $\alpha_p+\beta_p+\gamma_p = 1$ et $2\alpha_p+\beta_p = \dfrac{(1+\sqrt{2})^p-(1-\sqrt{2})^p}{2\sqrt{2}}$. Donc A^p, qui est de la forme $M(A_p,B_p,C_p)$ d'après 2)e), vaut

$$A^p = M\left(1, \frac{(1+\sqrt{2})^p-(1-\sqrt{2})^p}{2\sqrt{2}}, \alpha_p\right)$$

Bon, le calcul n'est plus très faisable à la main sans beaucoup de méthode et de recul.

e) **i)** On remarque que $X_{p+1} = AX_p$. Soit $\mathcal{H}_p : X_p = A^pX_0$.
$\mathcal{H}_0$ est vraie. Si $\mathcal{H}_p$ est vraie, $X_{p+1} = AX_p = A^{p+1}X_0$ donc $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie.
Donc, par récurrence, $\boxed{\text{Pour tout } p\in\mathbb{N},\ X_p = A^pX_0.}$

ii) D'après e)i) et d)iv), $\boxed{X_p = A^pX_0 = \alpha_pA^2X_0+\beta_pAX_0+\gamma_pX_0}$

En calculant $A^2X_0 = \begin{pmatrix}5+4\sqrt{2}\\ 8+6\sqrt{2}\\ 7+4\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $AX_0 = \begin{pmatrix}1+2\sqrt{2}\\ 4+2\sqrt{2}\\ 3+2\sqrt{2}\end{pmatrix}$, on trouve

$$X_p = \begin{pmatrix}2\sqrt{2}(2\alpha_p+\beta_p)+1\\ 4((2+\sqrt{2})\alpha_p+\beta_p)+2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2}((2+\sqrt{2})\alpha_p+\beta_p)+3\end{pmatrix}$$

Or $(2+\sqrt{2})\alpha_p+\beta_p = ...$ Bon, le calcul n'est pas vraiment faisable sans Maple. Il reste du $(1+\sqrt{2})^p$ dans chacune des suites (u_n), (v_n) et (w_n) donc les limites sont $\pm\infty$ suivant le signe du coefficient devant $(1+\sqrt{2})^p$.

Exercice 2 (CCP TPC 2013)

Partie 1 (Étude d'un endomorphisme)

1) Soit $P,Q\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\Delta(\lambda P+Q) = (\lambda P+Q)(X+1)-(\lambda P+Q)(X) = \lambda(P(X+1)-P(X))+(Q(X+1)-Q(X)) = \lambda\Delta(P)+\Delta(Q)$$

Donc Δ est linéaire.
De plus $\deg P(X+1) = \deg P$ donc $\deg(\Delta(P)) \leqslant \deg P \leqslant p$ d'où $\Delta(P) \in E$.
Ainsi, $\boxed{\Delta \text{ est un endomorphisme de } E.}$

2) Soit $k \in [\![1, p]\!]$. La formule du binôme de Newton [1] nous donne :

$$\Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$$

Donc $\boxed{\deg \Delta(X^k) = k-1}$ et le coefficient dominant est $\binom{k}{k-1} = \boxed{k}$

3) En notant les coefficients de la matrice M à partir de 0 ($M = (m_{ij})_{0 \leqslant i,j \leqslant p}$) alors par définition

$$\Delta(X^j) = \sum_{i=0}^{p} m_{ij} X^i$$

Or d'après 2), $\deg \Delta(X^j) = j-1$, c'est-à-dire $m_{ij} = 0$ pour tout $i \geqslant j$.
Donc $\boxed{\text{La matrice } M \text{ de } \Delta \text{ dans } \mathcal{B}_0 \text{ est une matrice triangulaire supérieure.}}$
On pouvait même écrire la matrice, vu que l'on vient de calculer $m_{ik} = \binom{k}{i}$ pour $i < k$.

4) La matrice de Δ est triangulaire d'après 3), avec des 0 sur la diagonale et des coefficients non nul au-dessus (k à la $k+1$-ième colonne) d'après 2).
Donc son rang est p (pivot de Gauss). Ainsi, rg $M = p =$ rg $\Delta = \dim \mathrm{Im}\,(\Delta)$.
Or d'après 2), $\deg(\Delta(X^k)) = k-1 \leqslant p-1$ pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ et $\Delta(1) = 0$.
Donc Im $\Delta \subset \mathbb{R}_{p-1}[X]$. Comme $\dim \mathrm{Im}\,(\Delta) = p = \dim \mathbb{R}_{p-1}[X]$,

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(\Delta) = \mathbb{R}_{p-1}[X]}$$

5) Méthode 1 : $\Delta(1) = 0$ donc $\mathbb{R}_0[X] \subset \mathrm{Ker}\,(\Delta)$.
Or par le théorème du rang, $\dim \mathbb{R}_0[X] = 1 = \dim \mathrm{Ker}\,(\Delta)$.
Donc $\boxed{\mathrm{Ker}\,(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]}$
Méthode 2 (double inclusion) : De même que ci-dessus, $\mathbb{R}_0[X] \subset \mathrm{Ker}\,(\Delta)$.
Réciproquement, soit $P \in \mathrm{Ker}\,(\Delta)$: $P(X+1) = P(X)$.
Donc, par une récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X+n) = P(X)$.
Si $\deg P > 0$, notons $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine (il en existe toujours au moins une). D'après ci-dessus,

$$\forall n \in \mathbb{N} P(\alpha + n) = P(\alpha) = 0$$

Donc P a une infinité de racines : $P = 0$. Ce qui est absurde vu que l'on a supposé $\deg P > 0$.
Donc $P \in \mathbb{R}_0[X]$. Ainsi, $\mathrm{Ker}\,(\Delta) \subset \mathbb{R}_0[X]$ et finalement $\boxed{\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]}$

6) *Toujours l'idée : si on demande $A = B$, écrire $A - B = 0$.* Soit P, $Q \in E$.

$$\begin{aligned} \Delta(P) = \Delta(Q) &\iff \Delta(P) - \Delta(Q) = \Delta(P - Q) = 0 \\ &\iff P - Q \in \mathrm{Ker}\,(\Delta) = \mathbb{R}_0[X] \qquad \text{(d'après 5))} \\ &\iff \exists c \in \mathbb{R}, P(X) - Q(X) = c \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall P, Q \in E, \qquad \Delta(P) = \Delta(Q) \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, P(X) - Q(X) = c}$

1. Ok, c'était la rentrée. Ok, vous veniez de rentrer de vacances. Mais quand même !! $(X+1)^k$, la formule du binôme !

7) Existence : $pX^{p-1} \in \mathbb{R}_{p-1}[X] = \mathrm{Im}\,(\Delta)$ (d'après 4)), donc il existe $Q_0 \in E$ tel que $\Delta(Q_0) = pX^{p-1}$.
Si on pose $K = \displaystyle\int_0^1 Q_0(t)\,\mathrm{d}t$ et $Q = Q_0 - K$, il vient

$$\Delta(Q) = \Delta(Q_0) - \Delta(\underbrace{K}_{\in \mathrm{Ker}\,(\Delta)}) = pX^{p-1} - 0$$

puis $\displaystyle\int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 Q_0(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 K\,\mathrm{d}t = \int_0^1 Q_0(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 Q_0(t)\,\mathrm{d}t = 0$
D'où l'existence du polynôme Q qui convient.
Unicité : Soit Q_1 et Q_2 qui conviennent. $\Delta(Q_1) = \Delta(Q_2)$ donc, d'après 6),$Q_1 = Q_2 + c$.
Ainsi $\underbrace{\displaystyle\int_0^1 Q_1(t)\,\mathrm{d}t}_{=0} = \underbrace{\displaystyle\int_0^1 Q_2(t)\,\mathrm{d}t}_{=0} + \displaystyle\int_0^1 c\,\mathrm{d}t$, puis $c = 0$.
Par conséquent $Q_1 = Q_2$ et finalement Q est unique.
Conclusion : il existe un unique polynôme $Q \in E$ tel que :

$$\Delta(Q) = pX^{p-1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Partie 2 (Étude d'une suite de fonctions polynomiales)

1) $\boxed{B_1 = X - \dfrac{1}{2} \qquad B_2 = X^2 - X + \dfrac{1}{6} \qquad B_3 = X^3 - \dfrac{3}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X}$

2) Soit $n \geqslant 2$. On a $B_n' = nB_{n-1}$ et $n-1 \geqslant 1$ donc

$$0 = \int_0^1 B_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{B_n'}{n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\,[B_n(x)]_0^1 = \frac{1}{n}(B_n(1) - B_n(0))$$

Ainsi $\boxed{B_n(0) = B_n(1).}$

3) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad B_n = X^n + P \quad \text{avec} \quad \deg P < n$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie par hypothèse : $B_0 = 1$.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie. Comme $B_{n+1}' = (n+1)B_n = (n+1)X^n + (n+1)P$, en primitivant il vient

$$B_{n+1} = X^{n+1} + Q$$

  Où Q est une primitive de $(n+1)P$ qui convient : en particulier, $\deg Q = (\deg P) + 1 < n+1$.
  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad B_n \text{ est un polynôme de degré } n \text{ de coefficient dominant égal à } 1.}$

4) Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(n) : \quad B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$$

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: $B_1(X) = X - 1/2$, donc $B_1(X+1) - B_1(X) = 1 = 1 \times X^{1-1}$. Ainsi, $\mathcal{H}(1)$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie, c'est-à-dire, en multipliant par $(n+1)$,

$$(n+1)B_n(X+1) - (n+1)B_n(X) = (n+1)nX^{n-1}$$

  En intégrant entre 0 et x le premier membre, il vient

$$\begin{aligned}
\int_0^x (n+1)B_n(t+1) - (n+1)B_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t &= [B_{n+1}(t+1) - B_{n+1}(t)]_0^x \\
&= B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(1) - B_{n+1}(x) + B_{n+1}(0) \\
&= B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x)
\end{aligned}$$

puisque $n+1 \geqslant 2$, d'après 2)b), $B_{n+1}(0) = B_{n+1}(1)$. Et $\int_0^x (n+1)nt^{n-1}\,\mathrm{d}t = (n+1)x^n$
Ainsi, $B_{n+1}(X+1) - B_{n+1}(X) = (n+1)X^n$, et $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}}$

5) Soit $p \in \mathbb{N}$. En posant $n = p+1 \in \mathbb{N}^*$, le résultat précédent s'écrit

$$B_{p+1}(x+1) - B_{p+1}(x) = (p+1)x^p$$

On reconnaît $\int_x^{x+1} B'_{p+1}(t)\,\mathrm{d}t = B_{p+1}(x+1) - B_{p+1}(x)$. Or $B'_{p+1} = (p+1)B_p$.
Donc en simplifiant par $(p+1) \neq 0$, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^p = \int_x^{x+1} B_p(t)\,\mathrm{d}t$$

6) **a)** $S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p = \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} B_p(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{n+1} B_p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0)}{p+1}$
(La dernière égalité via un calcul identique à celui du 4) : on aurait mieux fait de partir directement du résultat obtenu en 3)).

b)

$$\begin{aligned}
S_1(n) &= \frac{B_2(n+1)-b_2}{2} = \frac{(n+1)^2-(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+1-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\\
S_2(n) &= \frac{B_3(n+1)-b_3}{3} = \frac{(2n^2+n)(n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
S_3(n) &= \frac{B_4(n+1)-b_4}{4} = \frac{(n+1)^4-2(n+1)^3+(n+1)^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{(en bonus)}
\end{aligned}$$

7) Soit $n \in \mathbb{N}$. En identifiant $B_n(x)$ à son polynôme de Taylor de degré n, on trouve

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Or, par récurrence sur k, $B_n^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)B_{n-k}$. Par conséquent

$$B_n^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} b_{n-k}$$

En remplaçant dans la formule de Taylor, puis en changeant de variable $k \leftarrow n-k$, il vient

$$\boxed{B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}\, x^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} b_k\, x^{n-k} \boxed{= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k\, x^{n-k}}$$

8) La suite C_n vérifie :

$$\begin{cases}
C_0 = 1\\
\forall n \in \mathbb{N},\ C'_{n+1}(X) = (-1)^{n+1}(-B'_{n+1}(1-X)) = (-1)^{n+2}(n+1)B_n(1-X) = (n+1)C_n(X)\\
\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 C_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (-1)^n B_n(1-t)\,\mathrm{d}t = (-1)^{n+1}\int_1^0 B_n(u)\,\mathrm{d}u = 0
\end{cases}$$

Or la suite est bien définie : s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B_n \neq C_n$, notons N le plus petit n qui convient.
Comme $B_0 = C_0 = 1$, $N \geqslant 1$.
De plus $B_{N-1} = C_{N-1}$ donc $B'_N = C'_N$, puis $B_N = C_N + K$.
Or $\int_0^1 B_N(t)\,\mathrm{d}t = 0 = \int_0^1 C_N(t)\,\mathrm{d}t$, donc $K = 0$. Ce qui est absurde. Donc $B_n = C_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9) $\forall n \geqslant 0$, $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$; et d'après 2)b), $\forall n \geqslant 2$, $B_n(0) = B_n(1)$.
Donc pour tout $n \geqslant 1$, $b_{2n+1} = B_{2n+1}(0) = -B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(1)$, et finalement $\boxed{b_{2n+1} = 0.}$

En évaluant en $X = 1/2$ on trouve que, pour tout $n \geqslant 0$, $B_{2n+1}(1/2) = -B_{2n+1}(1/2)$ donc $\boxed{B_{2n+1}(1/2) = 0.}$

10) Montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ la propriété $\mathcal{H}(n)$:

⋆ B_{2n} vérifie

- $(-1)^n B_{2n}(0) < 0 \qquad (-1)^n B_{2n}(1) < 0 \qquad (-1)^n B_{2n}(1/2) > 0$
- la fonction $(-1)^n B_{2n}$ est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

⋆ B_{2n+1} vérifie

- $(-1)^n B_{2n+1}(0) = (-1)^n B_{2n+1}(1) = (-1)^n B_{2n+1}(1/2) = 0$
- il existe deux réels $\alpha_{2n+1} \in]0, \frac{1}{2}[$ et $\beta_{2n+1} \in]\frac{1}{2}, 1[$ tels que la fonction $(-1)^n B_{2n+1}$ soit strictement décroissante sur $[0, \alpha_{2n+1}]$, puis strictement croissante sur $[\alpha_{2n+1}, \beta_{2n+1}]$, puis strictement décroissante sur $[\beta_{2n+1}, 1]$.

Ce qui peut aussi s'écrire

x	0		α_n		$\frac{1}{2}$		β_n		1
$(-1)^n B_{2n}$	$(-1)^n B_{2n}(0) < 0$	↗	0	↗	$(-1)^n B_{2n}(\frac{1}{2}) > 0$	↘	0	↘	$(-1)^n B_{2n}(1) < 0$
signe de $(-1)^n B_{2n}(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$(-1)^n B_{2n+1}$	0	↘	$(-1)^n B_{2n+1}(\alpha_n)$	↗	0	↗	$(-1)^n B_{2n+1}(\beta_n)$	↘	0
signe de $(-1)^n B_{2n+1}(x)$			$-$		0		$+$		

Justification des tableaux de signes :

- La dérivée de $(-1)^n B_{2n+1}$ (dont on connaît les variations) est $(2n+1)(-1)^n B_{2n}$ par définition des polynômes de Bernoulli, d'où le signe de $(-1)^n B_{2n}(x)$ et les valeurs en α_n et β_n.
- Le signe de $(-1)^n B_{2n+1}(x)$ est une conséquence du tableau de variations de $(-1)^n B_{2n+1}$, sachant que $(-1)^n B_{2n+1}(0) = (-1)^n B_{2n+1}(1) = (-1)^n B_{2n+1}(1/2) = 0$

$\boxed{\mathcal{H}_1}$: Étudions $(-1)^1 B_2(X) = -X^2 + X - \frac{1}{6}$ et $(-1)^1 B_3(X) = -X^3 + \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}X$.

⋆ $-B_2'(x) = -2x + 1$ s'annule en $1/2$, de tableau de signe immédiat, d'où le tableau de variation de $-B_2$. De plus $-B_2(0) = -B_2(1) = -\frac{1}{6} < 0$ et $-B_2(1/2) = \frac{1}{12} > 0$.
La fonction $-B_2$ est continue, strictement monotone sur $[0, 1/2]$ et sur $[1/2, 1]$, ayant des valeurs de signes opposés aux extrémités de ces intervalles, s'annule donc exactement une fois sur chacun de ces intervalles, en des valeurs que l'on notera respectivement α_1 et β_1 (théorème de la bijection).
De plus, sur les intervalles $]0, \alpha_1[$ et $]\beta_1, 1[$, $-B_2 < 0$; et sur l'intervalle $]\alpha_1, \beta_1[$, $-B_2 > 0$.

⋆ $-B_3'(x) = 3(-B_2(x))$ donc on déduit de ci-dessus le tableau de signe de $-B_3'(x)$, puis le tableau de variation de $-B_3$ (voir ci-dessous).
D'après 2)f) et 2)b), $-B_3(1/2) = 0$ et $-B_3(0) = -B_3(1) = -b_3 = 0$

Donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie. Tableau récapitulatif :

x	0		α_1		$\frac{1}{2}$		β_1		1
$-B_2$	$-B_2(0)<0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$-B_2(\frac{1}{2})>0$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-B_2(1)<0$
signe de $-B_2(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$-B_3$	0	$\searrow$	$-B_3(\alpha_1)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$-B_3(\beta_1)$	$\searrow$	0
signe de $-B_3(x)$			$-$		0		$+$		

$\boxed{\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. On a donc les tableaux de variations et de signes de la page 7.

⋆ Étude de $(-1)^{n+1}B_{2n+2}$.

- Variations : $(-1)^{n+1}B'_{2n+2} = -(2n+2)(-1)^n B_{2n+1}$ donc le tableau de signe de la dérivée de $(-1)^{n+1}B_{2n+2}$ est l'opposé de la dernière ligne du tableau $\mathcal{H}(n)$. On obtient le tableau de variations suivant

x	0		$\frac{1}{2}$		1
signe de $(-1)^{n+1}B'_{2n+2}(x)$		$+$	0	$-$	
$(-1)^{n+1}B_{2n+2}$	$(-1)^{n+1}B_{2n+2}(0)$	$\nearrow$	$(-1)^{n+1}B_{2n+2}(\frac{1}{2})$	$\searrow$	$(-1)^{n+1}B_{2n+2}(1)$

- Signe de $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(x)$ en 0 , $\frac{1}{2}$ et 1 : D'après 2)b) $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(0) = (-1)^{n+1}B_{2n+2}(1)$. Si ce nombre est positif ou nul, alors $(-1)^{n+1}B_{2n+2}$ est de signe constant sur $[0,1]$ (tableau de variations). Or par définition des polynômes de Bernoulli, $\displaystyle\int_0^1 B_{2n+2}(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Ainsi, d'après 3)a), $B_{2n+2} = 0$. Or la fonction $x \mapsto (-1)^{n+1}B_{2n+2}(x)$ est *strictement* croissante sur $[0,1/2]$, donc c'est absurde. Ainsi $\boxed{(-1)^{n+1}B_{2n+2}(0) = (-1)^{n+1}B_{2n+2}(1) < 0.}$
  De même, si $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(\frac{1}{2}) \leqslant 0$, $(-1)^{n+1}B_{2n+2}$ est de signe constant et d'intégrale nulle sur $[0,1]$, ce qui est absurde. Donc $\boxed{(-1)^{n+1}B_{2n+2}(\frac{1}{2}) > 0.}$
- Tableau de signe de $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(x)$: De même que lors de l'étude du signe de $-B_2$, on applique le théorème de la bijection sur les intervalles $[0,1/2]$ et $[1/2,1]$, ce qui nous donne l'existence de α_{n+1} et β_{n+1} et le tableau de signe de $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(x)$. (voir le tableau récapitulatif en fin de paragraphe).

⋆ Étude de $(-1)^{n+1}B_{2n+3}$.

- Variations : Le tableau de signe de $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(x)$ est le même que celui de la dérivée $(-1)^{n+1}B'_{2n+3} = (2n+3)(-1)^{n+1}B_{2n+2}$, d'où le tableau de variations (voir tableau récapitulatif).

- Valeur de $(-1)^{n+1}B_{2n+3}(x)$ en 0 ,$\dfrac{1}{2}$ et 1 : D'après 2)b) et 2)f), il vient $(-1)^{n+1}B_{2n+3}(\dfrac{1}{2}) = 0$ et $(-1)^{n+1}B_{2n+3}(0) = (-1)^{n+1}B_{2n+3}(1) = (-1)^{n+1}b_{2n+3} = 0$.
- Le signe de $(-1)^{n+1}B_{2n+3}(x)$ s'obtient par lecture du tableau de variations.

On a donc montré que $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

Tableau récapitulatif :

x	0		α_{n+1}		$\dfrac{1}{2}$		β_{n+1}		1
$(-1)^{n+1}B_{2n+2}$	$(-1)^{n+1}B_{2n+2}(0) < 0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$(-1)^{n+1}B_{2n+2}(\dfrac{1}{2}) > 0$	$\searrow$	0	$\searrow$	$(-1)^{n+1}B_{2n+2}(1) < 0$
signe de $(-1)^{n+1}B_{2n+2}(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$(-1)^{n+1}B_{2n+3}$	0	$\searrow$	$(-1)^{n+1}B_{2n+3}(\alpha_n)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$(-1)^{n+1}B_{2n+3}(\beta_n)$	$\searrow$	0
signe de $(-1)^{n+1}B_{2n+3}(x)$			$-$		0		$+$		

Conclusion : $\forall n \geqslant 1$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

11) Soit $p \geqslant 1$. D'après la question 3)b), $(-1)^p b_{2p} = (-1)^p B_{2p}(0)$ est négatif, donc du signe de -1. Par conséquent, le signe de b_{2p} est $(-1)^{p+1}$.