Épreuve de Mathématiques 1

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1

Pour tout triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on note $M(a, b, c)$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}$$

On appelle $\mathscr{F}$ l'ensemble défini par

$$\mathscr{F} = \{M(a,b,c) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$$

On note $I_3 = M(1, 0, 0)$ la matrice unité, $J = M(0, 1, 0)$ et $K = M(0, 0, 1)$.

1) Étude de $\mathscr{F}$.

- **a)** Montrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
- **b)** Déterminer une base de $\mathscr{F}$ et en déduire sa dimension.

2) Étude de J.

- **a)** Calculer J^2 et J^3.
- **b)** Montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $J^{2k+1} = 2^k J$.
- **c)** En déduire une expression analogue de J^{2k+2}.
- **d)** Si $P = a_0 + a_1 X + \dots a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ et $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on note $P(A) = a_0 I_3 + a_1 A + \cdots + a_n A^n$. Soit $\mathscr{G} = \{P(J) \mid P \in \mathbb{R}[X]\}$. Montrer que $\mathscr{G} = \mathscr{F}$.
- **e)** En déduire que $\mathscr{F}$ est un sous-anneau commutatif de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

3) Étude de $A = M(1, 1, 0)$. On pose $P_A(X) = X^3 - 3X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

- **a)** Montrer que $P_A(A) = 0$.
- **b)** Retrouver ce résultat en remarquant que $A = I_3 + J$ et en utilisant le résultat de la question 2)a).
- **c)** Montrer que A est inversible et déterminer son inverse à l'aide du résultat de la question a).
- **d)** Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
  - **i)** Montrer qu'il existe un polynôme Q et des réels α_p, β_p et γ_p tels que

  $$X^p = P_A(X)Q(X) + \alpha_p X^2 + \beta_p X + \gamma_p$$

  - **ii)** Déterminer les racines de P_A.
  - **iii)** En évaluant l'égalité trouvée à la question i) en des valeurs de X bien choisies, déterminer α_p, β_p et γ_p.

iv) En déduire une expression de A^p.

e) On considère les suites réelles $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$, $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(w_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2\sqrt{2}$, $w_0 = 3$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$u_{p+1} = u_p + v_p, \qquad v_{p+1} = u_p + v_p + w_p, \qquad w_{p+1} = v_p + w_p$$

On note pour tout $p \in \mathbb{N}$, $X_p = \begin{pmatrix} u_p \\ v_p \\ w_p \end{pmatrix}$.

i) Montrer par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $X_p = A^p X_0$.

ii) Déduire des questions précédentes l'expression, pour tout entier naturel p, de u_p, v_p et w_p en fonctions de p, puis les limites de $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$, $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(w_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2 (CCP TPC 2013)

Partie 1 (Étude d'un endomorphisme)

Dans cette partie, $E = \mathbb{R}_p[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p, avec p un entier naturel non nul, **supérieur ou égal à 2**.
Les éléments de E sont indifféremment désignés par l'écriture P ou $P(X)$.

Soit l'application Δ définie sur E par :

$$\forall P \in E,\ \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

L'écriture $P(X+1)$ désigne le polynôme obtenu en remplaçant l'indéterminée X par $X+1$ dans l'expression de $P(X)$.
Par exemple, si $P = aX^2 + bX + c$, alors : $\begin{aligned} P(X+1) &= a(X+1)^2 + b(X+1) + c \\ &= aX^2 + (2a+b)X + a + b + c \end{aligned}$

1) Montrer que Δ est un endomorphisme de E.

2) Soit $\mathcal{B}_0 = (1, X, \cdots, X^p)$ la base canonique de E.
Pour $k \in [\![1, p]\!]$, montrer que $\Delta(X^k)$ est un polynôme de degré $k-1$ dont on calculera le coefficient dominant.

3) **a)** Montrer que la matrice M de Δ dans $\mathcal{B}_0$ est une matrice triangulaire supérieure.

b) Montrer, sans calculs, que M n'est pas une matrice diagonalisable.

4) Montrer que $\mathrm{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_{p-1}[X]$.

5) Déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta)$.

6) Montrer que :

$$\forall P, Q \in E, \quad \Delta(P) = \Delta(Q) \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}, P(X) - Q(X) = c$$

7) En déduire qu'il existe un unique polynôme $Q \in E$ tel que :

$$\Delta(Q) = pX^{p-1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

La notation $Q(t)$ dans $\displaystyle\int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t$ désigne, de façon usuelle, la fonction polynomiale associée au polynôme Q.

Partie 2 (Étude d'une suite de fonctions polynomiales)

Dans cette partie on étudie des fonctions polynomiales, ou polynômes, que l'on notera indifféremment $P(x)$ ou P.
Les résultats de la Partie I pourront être utilisés en étant directement transposés des polynômes de $\mathbb{R}_p[X]$ à leurs fonctions polynomiales associées.

On considère la suite de fonctions polynomiales à coefficients réels $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ B'_{n+1} = (n+1)B_n \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^1 B_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{cases}$$

1) Calculer B_1, B_2 et B_3.

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $B_n(0) = B_n(1)$

3) Montrer, **en utilisant une démonstration par récurrence**, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant égal à 1.

4) Démontrer par récurrence sur n, la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

Indication : on pourra intégrer la relation de récurrence au rang n pour une variable $t \in [0,x]$.

5) En déduire : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad x^p = \displaystyle\int_x^{x+1} B_p(t)\,\mathrm{d}t$

6) **a)** Soient n et p deux entiers naturels, déduire de la question précédente, l'expression de la somme

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^{n} k^p$$

en fonction de n, p et B_{p+1}.

b) Donner les expressions de $S_1(n)$ et $S_2(n)$ en fonction de n.

7) On appelle **nombres de Bernoulli**, les nombres b_n définis par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = B_n(0)$.
En identifiant $B_n(x)$ à son polynôme de Taylor de degré n, démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k}\, x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k\, x^{n-k}$$

8) Pour tout $n \geqslant 0$ on pose $C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$. Montrer, en utilisant la définition des polynômes de Bernoulli, que pour tout $n \geqslant 0$ on a $C_n(X) = B_n(X)$.

9) En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $b_{2n+1} = 0$ et que, pour tout $n \geqslant 0$, $B_{2n+1}(1/2) = 0$.

10) Montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ que B_{2n} vérifie

- $(-1)^n B_{2n}(0) < 0 \qquad (-1)^n B_{2n}(1) < 0 \qquad (-1)^n B_{2n}(1/2) > 0$
- la fonction $(-1)^n B_{2n}$ est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

et que B_{2n+1} vérifie

- $(-1)^n B_{2n+1}(0) = (-1)^n B_{2n+1}(1) = (-1)^n B_{2n+1}(1/2) = 0$
- il existe deux réels $\alpha_{2n+1} \in]0, \frac{1}{2}[$ et $\beta_{2n+1} \in]\frac{1}{2}, 1[$ tels que la fonction $(-1)^n B_{2n+1}$ soit strictement décroissante sur $[0, \alpha_{2n+1}]$, puis strictement croissante sur $[\alpha_{2n+1}, \beta_{2n+1}]$, puis strictement décroissante sur $[\beta_{2n+1}, 1]$.

Indication : *Il pourra être judicieux d'aborder en même temps la récurrence sur ces quatre propriétés.*

11) En déduire que le signe du réel b_{2p} est $(-1)^{p+1}$ pour tout $p \geqslant 1$.

FIN DE L'ÉPREUVE