Épreuve de Mathématiques 1

Correction

Exercice 1 (Petites mines, 2008, épreuve commune, second problème)

Partie A : Études de deux fonctions

1) **a)** La fonction $x \to \dfrac{1}{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$, donc les fonctions F et G sont définies et continues sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonction continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \cos(0) = 1$, donc F est prolongeable en 0 par $F(0) = 1$.
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = -\sin(0) = 0$, donc G est prolongeable en 0 par $G(0) = 0$.

2) **a)** Les fonctions F et G sont des produits de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, elles sont donc $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$F'(x) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \qquad \text{et} \qquad G'(x) = \frac{\sin x}{x} + \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$$

b) $F(x) - F(0) = \dfrac{x - x^3/3! + \mathrm{o}(x^3)}{x} - 1 = -\dfrac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^2)$ pour tout $x > 0$.
Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x) - F(0)}{x}$ existe et vaut $0 = F'(0)$.
$G(x) - G(0) = \dfrac{1 - (1 - x^3/2! + \mathrm{o}(x^2)}{x} = \dfrac{x}{2} + \mathrm{o}(x)$ pour tout $x > 0$.
Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{G(x) - G(0)}{x}$ existe et vaut $\dfrac{1}{2} = G'(0)$.

3) **a)** Soit $x > 0$. $F(x) = 0 \iff \sin x = 0 \iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{N}^*$. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = k\pi$. C'est une suite strictement croissante.

b) De même, soit $x > 0$. $G(x) = 0 \iff \cos x = 1 \iff x = 2k\pi\ k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $b_k = 2k\pi = a_{2k}$, c'est une sous suite de (a_k).

4) **a)** F est dérivable sur $[a_k, a_{k+1}]$ (q. 2)a)), et $F(a_k) = F(a_{k+1}) = 0$, donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $x_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $F'(x_k) = 0$.

b) Pour tout $x > 0$, $F'(x) = \dfrac{1}{x^2}(x \cos x - \sin x)$, et $x^2 > 0$. Donc F' est de même signe que $h : x \mapsto x\cos(x) - \sin(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus $F'(x) = 0$ si et seulement si $h(x) = 0$.

c) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = -x \sin x$, qui est non nul et de signe constant sur $]k\pi, (k + 1)\pi[$, donc h est strictement monotone sur $[k\pi, (k + 1)\pi]$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

d) La fonction h est continue strictement monotone sur $[k\pi, (k+1)\pi]$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donc injective sur chacun de ces intervalles : si h s'annule sur ces intervalles, elle ne s'y annule qu'une seule fois. De plus (q. 4)b)) x_k est un zéro F' si et seulement s'il est un zéro de h. Ainsi il y a unicité des x_k.

e) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $h(k\pi) = (-1)^k k\pi$ et $h(k\pi + \pi/2) = (-1)^{k+1}$ qui ne sont pas de même signe. Or h est continue donc elle s'annule sur l'intervalle $]a_k, a_k + \pi/2[$. Ainsi l'unique zéro de h $x_k \in]a_k, a_k + \pi/2[$.

f) $x_k \geqslant a_k = k\pi$ donc $\lim_{k\to+\infty} x_k = \lim_{k\to+\infty} k\pi = +\infty$. De plus, d'après q. 4)e), $x_k \in]k\pi, k\pi + \pi/2[$, donc il vient
$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \pi \leqslant \frac{x_k}{k} \leqslant \pi + \frac{\pi}{2k}$$
Par conséquence, $\lim_{k\to+\infty} \frac{x_k}{k} = \pi$, ce qui signifie $x_k \sim_{+\infty} k\pi$.

5)

Partie B : Deux fonctions définies par des intégrales

6) Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $t \mapsto f(t)\cos(xt)$ et $t \to f(t)\sin(xt)$ sont continues comme produit de fonctions continues, donc intégrables sur le segment $[0, 1]$.

7) $\forall x \in \mathbb{R}$, $I_f(-x) = \int_0^1 f(t)\cos(-xt)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t = I_f(x)$ donc I_f est paire.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $J_f(-x) = \int_0^1 f(t)\sin(-xt)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)(-\sin(xt))\,\mathrm{d}t = -J_f(x)$, donc J_f est impaire.

8) **a)** Soit $x > 0$. Par linéarité de l'intégrale,
$$I_f(x) + iJ_f(x) = \int_0^1 f(t)(\cos(xt) + i\sin(xt)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t$$
On fait une intégration par partie, f étant $\mathscr{C}^1$:
$$\int_0^1 f(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{f(t)e^{ixt}}{ix}\right]_0^1 - \int_0^1 f'(t)\frac{e^{ixt}}{ix}\,\mathrm{d}t = \frac{f(1)e^{ix} - f(0)}{ix} - \frac{1}{ix}\int_0^1 f'(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t$$

b) Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Les fonctions f et f' sont continues (puisque f est $\mathscr{C}^1$) donc bornées sur $[0, 1]$.

c) Soit $x > 0$.
$$\begin{aligned}
|I_f(x) + iJ_f(x)| &\leqslant \left|\frac{f(1)e^{ix} - f(0)}{ix}\right| + \left|\frac{1}{ix}\int_0^1 f'(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \frac{|f(1)e^{ix}| + |f(0)|}{|ix|} + \frac{1}{|ix|}\int_0^1 |f'(t)||e^{ixt}|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{2M}{x} + \frac{1}{x}\int_0^1 M'\,\mathrm{d}t = \frac{2M + M'}{x}
\end{aligned}$$

d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2M + M'}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} |I_f(x) + iJ_f(x)| = 0$, et finalement $\lim_{x\to+\infty} (I_f(x) + iJ_f(x)) = 0$.

Ainsi $\lim_{x\to+\infty} I_f(x) = \Re(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} J_f(x) = 0$ par linéarité et continuité de la partie réelle et de la partie imaginaire.

e) Par parité, $\lim_{x\to-\infty} I_f(x) = \lim_{x\to+\infty} I_f(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} J_f(x) = -\lim_{x\to+\infty} J_f(x) = 0$.

9) **a)** Cours.

b) Soit $u \in \mathbb{R}^*$ fixé. On applique l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[0, |u|]$:
$$|\sin(u) - \sin(0)| \leqslant (\sup_{[0,|u|]} |\cos|)|u| = |u|$$

c) Soient x et y deux réels. En majorant $|\sin\left(\frac{xt + yt}{2}\right)|$ par 1, il vient
$$\begin{aligned}
|I_f(x) - I_f(y)| &= \left|\int_0^1 f(t)(\cos(xt) - \cos(yt))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |f(t)| \left|-2\sin\left(\frac{xt + yt}{2}\right)\sin\left(\frac{xt - yt}{2}\right)\right|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^1 |f(t)|\,|xt - yt|\,\mathrm{d}t \leqslant |x - y|\int_0^1 t|f(t)|\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

d) La fonction I_f est $\int_0^1 t|f(t)|\,\mathrm{d}t$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, donc continue.

10) La fonction f constante égale à 1 convient.

Exercice 2 (ATS 2011, exercice 3 – corrigé UPS)

1) a) La fonction $v \mapsto \cos v$ est continue et ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, donc la fonction $v \mapsto \frac{1}{\cos v}$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ comme l'inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas. Pour tout $x \in]-\pi;\pi[$, on a $\left[0,\frac{x}{2}\right] \subset]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et donc $v \mapsto \frac{1}{\cos v}$ est continue sur $\left[0,\frac{x}{2}\right]$. Elle admet donc une primitive notée P. L'intégrale définissant $f(x)$ est donc bien définie pour tout $x \in]-\pi;\pi[$ et

$$\forall x \in]-\pi,\pi[, \quad f(x) = \Big[P(v)\Big]_0^{x/2} = P\left(\frac{x}{2}\right) - P(0).$$

Or P est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, donc f est dérivable comme composée sur $]-\pi,\pi[$ et

$$\boxed{\forall x \in]-\pi,\pi[, \qquad f'(x) = \frac{1}{2}\,P'\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos(x/2)}.}$$

La fonction f est définie sur $]-\pi,\pi[$ qui est symétrique par rapport à 0. Soit $x \in]-\pi;\pi[$. Par le changement de variable $u = -v$ et en utilisant la parité de la fonction cos, on a

$$\forall x \in]-\pi;\pi[, \quad f(-x) = \int_0^{-x/2} \frac{\mathrm{d}v}{\cos v} = \int_0^{x/2} \frac{-\mathrm{d}u}{\cos(-u)} = -\int_0^{x/2} \frac{\mathrm{d}u}{\cos(u)} = -f(x)$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc impaire.}}$$

Pour étudier les variations de f sur $]-\pi,\pi[$ il suffit donc d'étudier ses variations sur $[0,\pi[$. Or si $x \in [0,\pi[$, alors $x/2 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\cos(x/2) > 0$ donc $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0,\pi[$. Comme f est impaire, on en déduit que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur }]-\pi;\pi[.}$$

b) On sait qu'au voisinage de $0, \sin u \underset{0}{\sim} u$ donc

$$\boxed{\text{Au voisinage de 0,} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right) \underset{0}{\sim} u.}$$

Soit $x \in [0,\pi[$. Dans l'intégrale définissant $f(x)$, on effectue le changement de variables $v = \frac{\pi}{2} - u$: on a $\mathrm{d}v = -\mathrm{d}u$, la borne $v = 0$ devient $u = \frac{\pi}{2}$ et la borne $v = \frac{x}{2}$ devient $u = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$. On obtient donc

$$f(x) = \int_0^{x/2} \frac{\mathrm{d}v}{\cos(v)} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}} \frac{-\,\mathrm{d}u}{\cos(\pi/2-u)} = \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sin u}.$$

Or sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, les fonctions $u \mapsto \frac{1}{\sin u}$ et $u \mapsto \frac{1}{u}$ sont continues et strictement positives et elles sont équivalentes au voisinage de 0. Les deux intégrales généralisées $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{u}$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sin u}$ sont donc de même nature.

Or la première est divergente car $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = +\infty$ (intégrale de Riemann) donc l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin u}\,\mathrm{d}u$ est divergente et $\lim\limits_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin u}\,\mathrm{d}u = +\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to\pi^-}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=0^+$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x\to\pi^-} f(x)=\lim_{x\to\pi^-}\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sin u}=+\infty}.$$

De plus f est continue et strictement croissante sur $[0,\pi[$ donc par le théorème de la bijection continue, f est une bijection de $[0;\pi[$ sur $[f(0);\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)[=[0;+\infty[$. Comme de plus f est impaire, on en conclut que

$$\boxed{f \text{ est une bijection de }]-\pi;\pi[\text{ dans } \mathbb{R}.}$$

2) **a)** f est une bijection de $]-\pi,\pi[$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]-\pi;\pi[$ et pour tout $x\in]-\pi;\pi[$, $f'(x)=\dfrac{1}{2\cos(x/2)}\neq 0$ car le cosinus ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
Sa réciproque g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall y\in\mathbb{R},\qquad g'(y)=\frac{1}{f'(g(y))}=\frac{1}{\frac{1}{2\cos(g(y)/2)}}\qquad\text{donc}\qquad \boxed{\forall y\in\mathbb{R},\qquad g'(y)=2\cos\left(\frac{g(y)}{2}\right)}$$

Comme g et la fonction cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée et

$$\forall y\in\mathbb{R},\quad g''(y)=-g'(y)\ \sin\left(\frac{g(y)}{2}\right)=-2\ \cos\left(\frac{g(y)}{2}\right)\ \sin\left(\frac{g(y)}{2}\right)=\boxed{-\ \sin\Big(g(y)\Big).}$$

b) D'après la question précédente, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$g''(t)+\sin\left(g(t)\right)=0\qquad\text{et } g(0)=0 \text{ car } f(0)=0,\qquad\text{et}\quad g'(0)=2\cos(0)=2>0$$

Donc

$$\boxed{t\mapsto g(t)\text{ est solution de } X''(t)+\sin\left(X(t)\right)=0\qquad\text{avec } t\geqslant 0,\ X(0)=0,\ X'(0)=2.}$$

3) La décomposition en éléments simples de $\dfrac{2}{1-u^2}$ est $\dfrac{2}{1-u^2}=\dfrac{1}{1-u}+\dfrac{1}{1+u}$, donc pour tout $t\in]-1;1[$,

$$h(t)=\int_0^t\frac{2\ \mathrm{d}u}{1-u^2}=\int_0^t\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\ \mathrm{d}u=-\ln|1-t|+\ln|1+t|\,.$$

Or $t\in]-1;1[$ donc $1+t>0$ et $1-t>0$ donc

$$\boxed{\forall t\in]-1;1[,\quad h(t)=\int_0^t\frac{2\ \mathrm{d}u}{1-u^2}=\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right).}$$

4) **a)** Soit $x\in]-\pi,\pi[$. On pose $u=\tan\left(\dfrac{v}{2}\right)$. Comme dans l'intégrale définissant $f(x)$, $v\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ on a $v/2\in\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$ et donc

$$\operatorname{Arctan} u=\operatorname{Arctan}\left(\tan\left(\frac{v}{2}\right)\right)=\frac{v}{2}\qquad\text{donc}\qquad\boxed{v=2\operatorname{Arctan} u}\qquad\text{et}\qquad\boxed{\mathrm{d}v=\frac{2}{1+u^2}\ \mathrm{d}u.}$$

b)

$$\frac{1-u^2}{1+u^2}=\frac{1-\tan^2(v/2)}{1+\tan^2(v/2)}=\frac{\cos^2(v/2)-\sin^2(v/2)}{\cos^2(v/2)+\sin^2(v/2)}=\frac{2\cos^2(v/2)-1}{1}=\cos(v).$$

c) Soit $x \in]-\pi,\pi[$. Dans l'intégrale définissant $f(x)$, on effectue le changement de variables $u = \tan(v/2)$: la borne $v=0$ devient $u=\tan(0)=0$ et la borne $v=x/2$ devient $u=\tan(x/4)$ et avec les questions précédentes, on a

$$f(x) = \int_0^{\tan(x/4)} \frac{1}{\frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\tan(x/4)} \frac{2}{1-u^2}\,\mathrm{d}u = h(\tan(x/4)),$$

et donc

$$\boxed{\forall x \in]-\pi;\pi[, \quad f(x) = \ln\left(\frac{1+\tan(x/4)}{1-\tan(x/4)}\right).}$$

Exercice 3 (ESC Chambéry, ECT)

1) a) Le calcul nous donne $B = A - 3I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B^3 = 0$.

b) Pour tout entier $k \geqslant 3$, $B^k = B^3 B^{k-3} = 0.B^{k-3} = 0$.

2) $A = 3I_3 + B$. Or I_3 et B **commutent**, donc on peut écrire la formule du binôme de Newton : pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} A^n &= (3I_3+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k} I_3^{n-k} B^k = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 3^{n-k} B^k \qquad (B^k = 0 \text{ si } k \geqslant 3) \\ &= 3^n I_3 + n3^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} B^2 = 3^n \left(I_3 + \frac{n}{3}B + \frac{n(n-1)}{18} B^2 \right) \end{aligned}$$

Si $n=0$, $A^0 = I_3$, la formule est vraie ; et si $n=1$, on retrouve aussi la bonne formule, puisque le terme en $n(n-1)$ s'annule.

3) a) On trouve la relation de récurrence suivante : $X_{n+1} = AX_n$. La récurrence est laissée en exercice au lecteur (mais il faut la faire ! puisqu'elle est demandée).

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} X_n &= A^n X_0 = 3^n \left(I_3 + \frac{n}{3}B + \frac{n(n-1)}{18}B^2 \right) X_0 \\ \text{Donc } \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} &= 3^n \left(X_0 + \frac{n}{3}BX_0 + \frac{n(n-1)}{18}B^2 X_0 \right) = 3^n \begin{pmatrix} 2+2n/3 \\ 1+2n/3+n(n-1)/9 \\ -2n/3-n(n-1)/9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi $u_n = 3^n(2+2n/3)$ et a pour limite $+\infty$; $v_n = 3^n(1+2n/3+n(n-1)/9)$ et a pour limite $+\infty$; $w_n = 3^n(-2n/3-n(n-1)/9)$ et a pour limite $-\infty$.

Exercice 4 (CAPES 2009, et plusieurs autres sujets 2009 pour la partie A)

A. Intégrales de Wallis *cette partie est extrêmement classique, donc à connaître.*

Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,\mathrm{d}t$.

1) a) Soit $n \geqslant 0$. On effectue le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - u$.
Donc $\cos(t) = \cos(\pi/2 - u) = \sin(u)$ et $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$.

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n u(-1)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u\,\mathrm{d}u$$

Remarque : t est une variable *muette*, comme k dans $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$. Elle n'existe qu'entre $\displaystyle\int$ et $\mathrm{d}t$. Ainsi on peut réutiliser cette variable un peu plus loin : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t$.

b) $\boxed{W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$ et $\boxed{W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \,\mathrm{d}t = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $\cos^n t \geqslant 0$. Donc par croissance de l'intégrale, $W_n \geqslant 0$. Supposons que $W_n = 0$. Puisque $t \mapsto \cos^n t$ est continue, alors $\cos^n t = 0$ pour tout $t \in [0, \pi/2]$, ce qui est absurde (par exemple $\cos 0 = 1$).

Ainsi, $\boxed{W_n > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

c) Soit $n \geqslant 2$. Effectuons une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t) \times (\cos^{n-1} t) \,\mathrm{d}t \\
&= \left[(\sin t) \times (\cos^{n-1} t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t) \left(-(n-1)(\sin t)(\cos^{n-2} t)\right) \,\mathrm{d}t \\
&= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)(\cos^{n-2} t) \,\mathrm{d}t = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^{n-2} t \,\mathrm{d}t \\
&= (n-1) W_{n-2} - (n-1) W_n
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\boxed{nW_n = (n-1)W_{n-2}.}$

d) Posons, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = nW_nW_{n-1}$. Alors, d'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 2$,

$$u_n = (nW_n)W_{n-1} = (n-1)W_{n-2}W_{n-1} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2} = u_{n-1}$$

La suite $\boxed{u_n = nW_nW_{n-1} \text{ est donc constante de valeur } u_1 = W_0W_1 = \frac{\pi}{2}.}$

2) **a)** Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$0 \leqslant \cos t \leqslant 1$$

Donc pour tout $n \geqslant 0$, $\cos^n t \geqslant 0$ et

$$0 \leqslant \cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$$

En intégrant cet encadrement, il vient $W_{n+1} \leqslant W_n$, c'est-à-dire $\boxed{(W_n) \text{ est décroissante.}}$

Soit $n \geqslant 2$. D'après 1)c), $nW_n = (n-1)W_{n-2}$. Ainsi, puisque (W_n) est décroissante,

$$\frac{n-1}{n}W_{n-1} \leqslant \frac{n-1}{n}W_{n-2} = W_n \leqslant W_{n-1}$$

Puisque $W_k \neq 0$ d'après 1)b), il reste à diviser par W_{n-1} et constater que l'inégalité est vraie en $n = 1$: $\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 1, \ \frac{n-1}{n} \leqslant \frac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1.}$

b) Rappel : Pour des suites non nulles au voisinage de $+\infty$, $u_n \sim v_n \iff \lim \frac{u_n}{v_n} = 1$.

D'après 1)d), $nW_nW_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$. Donc $\frac{1}{W_{n-1}} = \frac{2}{\pi}nW_n$ et l'encadrement de la question 2)a) s'écrit :

$$\frac{n-1}{n} \leqslant \frac{2}{\pi}nW_n^2 \leqslant 1$$

Donc, par encadrement, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{\pi}nW_n^2 = 1$, c'est-à-dire $W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$ et, comme $W_n > 0$,

$$\boxed{W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$$

3) Formule de Stirling

a) Montrons que la propriété :
$$\mathcal{H}(p) : \quad W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}$$
est vraie pour tout $p \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$ D'après 1)b), $W_0 = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{0!}{(2^0 0!)^2}\dfrac{\pi}{2}$, donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_p \Longrightarrow \mathcal{H}_{p+1}}$: Supposons $\mathcal{H}(p)$ vraie : $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$. Alors

$$\begin{aligned}
W_{2(p+1)} &= W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2}W_{2p} \qquad\qquad \text{(d'après 1)c))}\\
&= \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)(2p+1)}{(2(p+1))^2} \times \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{(2(p+1))!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2}
\end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}(p+1)$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall p \geqslant 0 \qquad W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}}$

D'après 1)d), pour tout $p \geqslant 0$, $W_{2p+1} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{(2p+1)W_{2p}}$. Ainsi
$$W_{2p+1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2p+1} \times \frac{(2^p p!)^2}{(2p)!}\frac{2}{\pi} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

b) D'après 2)b), $W_{2p} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$. D'après 3)a),
$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} \sim \frac{K(2p)^{2p}e^{-2p}\sqrt{2\pi 2p}}{(2^p K p^p e^{-p}\sqrt{2\pi p})^2}\frac{\pi}{2} = \frac{K}{K^2} \times \frac{2^{2p+1}}{2^{2p+1}} \times \frac{p^{2p+1/2}}{p^{2p+1}} \times \frac{e^{-2p}}{e^{-2p}} \times \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2\pi} = \frac{1}{K}\sqrt{\frac{\pi}{4p}}$$

Donc $\sqrt{\dfrac{\pi}{4p}} \sim \dfrac{1}{K}\sqrt{\dfrac{\pi}{4p}}$, et ainsi $\boxed{K = 1.}$

B. Volume d'une boule en dimension n

1) • Sens direct : Soit $n \geqslant 2$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
(x_1,\dots,x_n) \in \mathscr{B}_n &\Longrightarrow x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant R^2\\
&\Longrightarrow x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leqslant R^2 - x_N^2 \quad \text{et} \quad x_n^2 \leqslant R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2\\
&\Longrightarrow x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leqslant R^2 \quad \text{et} \quad |x_n| \leqslant \sqrt{R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2}\\
&\Longrightarrow \begin{cases} (x_1,\dots,x_n) \in \mathscr{B}_{n-1}\\ -\sqrt{R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2} \leqslant x_n \leqslant \sqrt{R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2}\end{cases}
\end{aligned}$$

• Réciproque : Soit $n \geqslant 2$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
\begin{cases} (x_1,\dots,x_n) \in \mathscr{B}_{n-1}\\ |x_n| \leqslant \sqrt{R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2}\end{cases} &\Longrightarrow |x_n| \leqslant \sqrt{R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2}\\
&\Longrightarrow x_n^2 \leqslant R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2\\
&\Longrightarrow x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant R^2\\
&\Longrightarrow (x_1,\dots,x_n) \in \mathscr{B}_n
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\boxed{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathscr{B}_n \Longleftrightarrow \begin{cases}(x_1,\ldots,x_n)\in\mathscr{B}_{n-1}\\ -\sqrt{R^2-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}\leqslant x_n\leqslant\sqrt{R^2-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}\end{cases}}$$

Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(n):\quad \mathscr{B}_n\text{est continûment paramétrable.}$$

est vraie pour tout $n\geqslant 1$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$ En dimension 1, $\mathscr{B}_1\subset\mathbb{R}$ est le segment $[-R,R]$, donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_{n-1}\Longrightarrow\mathcal{H}_n}$: Supposons $\mathcal{H}(n-1)$ vraie, c'est-à-dire $\mathscr{B}_{n-1}$ continûment paramétrable. D'après ci-dessus,

$$(x_1,\ldots,x_n)\in\mathscr{B}_n \Longleftrightarrow \begin{cases}(x_1,\ldots,x_n)\in\mathscr{B}_{n-1}\\ -\sqrt{R^2-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}\leqslant x_n\leqslant\sqrt{R^2-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}\end{cases}$$

Donc, en posant $\varphi:\mathscr{B}_{n-1}\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})=\sqrt{R^2-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}$, il vient

$$\mathscr{B}_n=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n/(x_1,\ldots,x_{n-1})\in\mathscr{B}_{n-1}\text{ et }-\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})\leqslant x_n\leqslant\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})\}$$

Ainsi, $\mathscr{B}_n$ est continûment paramétrable, et $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

- Conclusion : pour tout $n\geqslant 1$, $\boxed{\mathscr{B}_n\text{ est continûment paramétrable.}}$

2) Soit $\lambda>0$ un réel et $m\geqslant 0$ un entier. La fonction $x\to(\lambda^2-x^2)^{\frac{m}{2}}$ est paire donc

$$\int_{-\lambda}^{\lambda}(\lambda^2-x^2)^{\frac{m}{2}}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\lambda}(\lambda^2-x^2)^{\frac{m}{2}}\,\mathrm{d}x$$

Posons le changement de variable $x=\lambda\sin t$. Il vient

$$\int_0^{\lambda}(\lambda^2-x^2)^{\frac{m}{2}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\lambda^2-\lambda^2\sin^2 t)^{\frac{m}{2}}(-\lambda\cos t)\mathrm{d}t=\lambda^{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)^{\frac{m}{2}}\cos t\mathrm{d}t=\lambda^{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m+1}t\mathrm{d}t$$

En conclusion, $\boxed{\int_{-\lambda}^{\lambda}(\lambda^2-x^2)^{\frac{m}{2}}\,\mathrm{d}x=2\lambda^{m+1}W_{m+1}}$

3) Soit $n\geqslant 2$. D'après l'énoncé, la définition de V_n est $V_n=\int\cdots\int_{\mathscr{B}_n}1\,\mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}x_{n-1}\ldots\,\mathrm{d}x_1$

Montrons que la propriété :

$$\mathcal{H}(k):\quad V_n=2^k\left(\prod_{i=1}^k W_i\right)\int\ldots\int_{\mathscr{B}_{n-k}}(R^2-x_1^2-\cdots-x_{n-k}^2)^{\frac{k}{2}}\,\mathrm{d}x_{n-k}\ldots\,\mathrm{d}x_1$$

est vraie pour tout $k\in\{1,\ldots,n-1\}$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: D'après la question 1), $\mathscr{B}_n$ est continûment paramétrable, en posant $\varphi:\mathscr{B}_{n-1}\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})=\sqrt{R^2-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}$. Donc, d'après l'énoncé,

$$V_n=\int\cdots\int_{\mathscr{B}_n}1\,\mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}x_{n-1}\ldots\,\mathrm{d}x_1=\int\cdots\int_{\mathscr{B}_{n-1}}\left(\int_{-\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})}1\,\mathrm{d}x_n\right)\mathrm{d}x_{n-1}\ldots\,\mathrm{d}x_1$$

Or pour $(x_1,\ldots,x_{n-1})\in\mathscr{B}_{n-1}$ fixé,

$$\int_{-\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})}1\,\mathrm{d}x_n=2\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})=2\sqrt{R^2-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2}$$

Ainsi, comme $W_1=1$,

$$V_n=2^1\,(W_1)\int\ldots\int_{\mathscr{B}_{n-1}}(R^2-x_1^2-\cdots-x_{n-1}^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x_{n-1}\ldots\,\mathrm{d}x_1$$

et $\mathcal{H}(1)$ est vraie.

- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: On suppose $k+1<n$ (donc $n-k-1 \geqslant 1$) et $\mathcal{H}(k)$ vraie. D'après la question 1), $\mathscr{B}_{n-k}$ est continûment paramétrable, en définissant la fonction φ sur $\mathscr{B}_{n-k-1}$ par $\varphi(x_1,\dots,x_{n-k-1}) = \sqrt{R^2-x_1^2-\cdots-x_{n-k-1}^2}$. Donc, d'après l'énoncé,

$$\begin{aligned}\int\dots\int_{\mathscr{B}_{n-k}} &(R^2-x_1^2-\cdots-x_{n-k}^2)^{\frac{k}{2}}\,\mathrm{d}x_{n-k}\dots\mathrm{d}x_1\\ &= \int\dots\int_{\mathscr{B}_{n-k-1}}\left(\int_{-\varphi(x_1,\dots,x_{n-k-1})}^{\varphi(x_1,\dots,x_{n-k-1})}(R^2-x_1^2-\cdots-x_{n-k}^2)^{\frac{k}{2}}\,\mathrm{d}x_{n-k}\right)\mathrm{d}x_{n-k-1}\dots\mathrm{d}x_1\end{aligned}$$

Pour $(x_1,\dots,x_{n-k-1})\in\mathscr{B}_{n-k-1}$ fixé, posons $\lambda=\varphi(x_1,\dots,x_{n-k-1})$. En remarquant que

$$\int_{-\varphi(x_1,\dots,x_{n-k-1})}^{\varphi(x_1,\dots,x_{n-k-1})}(R^2-x_1^2-\cdots-x_{n-k}^2)^{\frac{k}{2}}\,\mathrm{d}x_{n-k} = \int_{-\lambda}^{\lambda}(\lambda^2-x_{n-k}^2)^{\frac{k}{2}}\,\mathrm{d}x_{n-k}$$

nous pouvons appliquer le résultat de la question 2) :

$$\int_{-\varphi(x_1,\dots,x_{n-k-1})}^{\varphi(x_1,\dots,x_{n-k-1})}(R^2-x_1^2-\cdots-x_{n-k}^2)^{\frac{k}{2}}\,\mathrm{d}x_{n-k} = 2\lambda^{k+1}W_{k+1} = 2W_{k+1}(R^2-x_1^2-\cdots-x_{n-k-1}^2)^{\frac{k+1}{2}}$$

Ainsi, en revenant à l'expression de V_n donnée par $\mathcal{H}(k)$, il vient

$$\begin{aligned}V_n &= 2^k\left(\prod_{i=1}^{k}W_i\right)\int\dots\int_{\mathscr{B}_{n-k}}(R^2-x_1^2-\cdots-x_{n-k}^2)^{\frac{k}{2}}\,\mathrm{d}x_{n-k}\dots\mathrm{d}x_1\\ &= 2^k\left(\prod_{i=1}^{k}W_i\right)\int\dots\int_{\mathscr{B}_{n-k-1}}\left(\int_{-\varphi(x_1,\dots,x_{n-k-1})}^{\varphi(x_1,\dots,x_{n-k-1})}(R^2-x_1^2-\cdots-x_{n-k}^2)^{\frac{k}{2}}\,\mathrm{d}x_{n-k}\right)\mathrm{d}x_{n-k-1}\dots\mathrm{d}x_1\\ &= 2^k\left(\prod_{i=1}^{k}W_i\right)\int\dots\int_{\mathscr{B}_{n-k-1}}\left(2W_{k+1}(R^2-x_1^2-\cdots-x_{n-k-1}^2)^{\frac{k+1}{2}}\right)\mathrm{d}x_{n-k-1}\dots\mathrm{d}x_1\\ &= 2^{k+1}\left(\prod_{i=1}^{k+1}W_i\right)\int\dots\int_{\mathscr{B}_{n-k-1}}(R^2-x_1^2-\cdots-x_{n-k-1}^2)^{\frac{k+1}{2}}\,\mathrm{d}x_{n-k-1}\dots\mathrm{d}x_1\end{aligned}$$

C'est-à-dire $\mathcal{H}(k+1)$.

- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall k\in\{1,\dots,n-1\}\quad V_n = 2^k\left(\prod_{i=1}^{k}W_i\right)\int\dots\int_{\mathscr{B}_{n-k}}(R^2-x_1^2-\cdots-x_{n-k}^2)^{\frac{k}{2}}\,\mathrm{d}x_{n-k}\dots\mathrm{d}x_1}$

4) Lorsque $k=n-1$, $\mathscr{B}_{n-(n-1)}=\mathscr{B}_1=[-R,R]$, et la formule ci-dessus s'écrit

$$V_n = 2^{n-1}\left(\prod_{i=1}^{n-1}W_i\right)\int_{-R}^{R}(R^2-x_1^2)^{\frac{n-1}{2}}\,\mathrm{d}x_1$$

Or d'après le résultat de la question 2), $\displaystyle\int_{-R}^{R}(R^2-x_1^2)^{\frac{n-1}{2}}\,\mathrm{d}x_1 = 2\,R^n\,W_n$ et finalement

$$\boxed{V_n = \left(\prod_{i=1}^{n}W_i\right)(2R)^n}$$

<u>Expression de V_{2p}</u> : Soit $p\geqslant 1$. Utilisons le résultat de la question A.1.d. : $nW_nW_{n-1}=\pi/2$.

$$\prod_{i=1}^{2p}W_i = \prod_{k=1}^{p}W_{2k-1}W_{2k} = \prod_{k=1}^{p}\frac{\pi}{4k} = \frac{1}{p!}\frac{\pi^p}{4^p}$$

Donc $\boxed{V_{2p} = \left(\prod_{i=1}^{2p}W_i\right)(2R)^{2p} = \frac{\pi^pR^p}{p!}.}$

Expressions de V_{2p+1} : Pour $p=1$, $V_1 = 2R$. Pour $p \geqslant 1$, $V_{2p+1} = (2R\,W_{2p+1})V_{2p}$. Or d'après A.3.a.,

$$W_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$$

Après calculs, $\boxed{V_{2p+1} = \frac{2^{2p+1}p!}{(2p+1)!}\pi^p R^{p+1}}$ (reste vraie en $p=0$)

$$V_1 = 2R \qquad V_2 = \pi R^2 (\text{ouf !}) \qquad V_3 = \frac{2^3}{3!}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad V_4 = \frac{\pi^2 R^4}{2}$$

5) Stirling : $V_{2p} \sim \pi^p R^p \dfrac{1}{\sqrt{2\pi p}p^p e^{-p}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi p}}\left(\dfrac{\pi e R}{p}\right)^p$

D'après A.2.b., $V_{2p+1} = (2R\,W_{2p+1})V_{2p} \sim 2R\sqrt{\dfrac{\pi}{2(2p+1)}}V_{2p} \sim \dfrac{2R}{\sqrt{4p(p+1)}}\left(\dfrac{\pi e R}{p}\right)^p$

Or $\lim\limits_{p\to+\infty} p\ln\left(\dfrac{\pi e R}{p}\right) = -\infty$ donc $\left(\dfrac{\pi e R}{p}\right)^p = e^{p\ln\left(\frac{\pi e R}{p}\right)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$

Ainsi $\lim\limits_{p\to+\infty} V_{2p} = \lim\limits_{p\to+\infty} V_{2p+1} = 0$. Or les suites extraites (V_{2p}) et (V_{2p+1}) recouvrent la suite (V_n) donc $\boxed{(V_n) \text{ converge vers } 0.}$

6) Calculons le rapport V_{n+1}/V_n en fonction de W_n :

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 2R\,W_{n+1}$$

Or d'après 2)a), (W_n) est décroissante, de limite nulle d'après 2)b). Donc, selon la valeur de R, la suite $(2R\,W_{n+1})$ est soit toujours plus petite que 1, soit plus grande que 1 jusqu'à un rang n_0, puis plus petite que 1.

Ce qui signifie que soit la suite (V_n) est décroissante, soit il existe un rang n_0 tel que la suite (V_n) soit croissante jusqu'en n_0, puis décroissante.

7) Il faut et il suffit que $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{\pi R}{2}$ soit plus petit que 1, c'est-à-dire $\boxed{R \leqslant \dfrac{2}{\pi}.}$

8) Calculons les premiers termes de la suite (W_n) à l'aide des deux premiers termes et de la relation de récurrence $W_n = \dfrac{n-1}{n}W_{n-2}$. Le but est que $2R\,W_{n+1} = 2W_{n+1}$ soit plus petit que 1.

$$W_0 = \frac{\pi}{2} \qquad W_1 = 1 \qquad W_2 = \frac{1}{2}W_0 = \frac{\pi}{4} \qquad W_3 = \frac{2}{3} \qquad W_4 = \frac{3\pi}{16} \qquad W_5 = \frac{8}{15} \qquad W_6 = \frac{5\pi}{16}$$

Or $2W_5 > 1$ et $2W_6 < \dfrac{3{,}2\times 5}{16} = 1$. Donc $n_0 = 5$.

Remarque : D'un point de vue physique, et V_n et V_{n+1} n'ont pas la même dimension, donc les comparer l'a pas de sens. Pour donner un sens aux questions 5 à 8, il faut considérer que V_n est la proportion du cube d'arête R occupée par la boule de rayon R. On vient donc de montrer, entre autre, que cette proportion tend vers 0 (q. 5), est décroissante si $R \leqslant 2/\pi$ (q. 7), est décroissante à partir de la dimension 5 si $R=1$.

FIN DE L'ÉPREUVE