Épreuve de Mathématiques 1

Durée 4 h

L'usage des calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Exercice 1 (Petites mines, 2008, épreuve commune, second problème)

On considère dans tout ce problème les deux fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$F(x) = \frac{\sin(x)}{x} \qquad G(x) = \frac{1-\cos(x)}{x}$$

Partie A : Études de deux fonctions

1) **a)** Montrer que les fonctions F et G sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que F et G sont prolongeables par continuité en 0. On notera encore F et G ces prolongements.

2) **a)** Montrer que les fonctions F et G sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer leurs dérivées.

b) Démontrer, à l'aide de développements limités, que les fonctions F et G sont dérivables en 0. Préciser les valeurs de $F'(0)$ et $G'(0)$.

3) **a)** Montrer que les réels strictement positifs tels que $F(x) = 0$ constituent une suite $(a_k)_{k\geqslant 1}$ strictement croissante. On donnera explicitement la valeur de a_k.

b) Montrer que les réels strictement positifs tels que $G(x) = 0$ constituent une suite $(b_k)_{k\geqslant 1}$ strictement croissante. Y-a-t'il un lien entre les suites $(a_k)_{k\geqslant 1}$ et $(b_k)_{k\geqslant 1}$?

4) **a)** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer <u>sans calcul</u> qu'il existe un réel $x_k \in]a_k, a_{k+1}[$ tel que $F'(x_k) = 0$.

b) Montrer que la fonction F' est de même signe que $h : x \mapsto x\cos(x) - \sin(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction h est strictement monotone sur $[a_k, a_{k+1}]$.

d) En déduire l'unicité du réel x_k défini dans la question 4.(a).

e) Établir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, x_k \in]a_k, a_k + \pi/2[$.

f) Calculer $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k$ puis déterminer un équivalent simple de la suite (x_k).

5) Tracer l'allure de la courbe représentative $\mathscr{C}_F$ de la fonction F lorsque l'abscisse x varie dans $[0, 4\pi]$. On se placera dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que $\|\vec{\imath}\| = 1\text{cm}$ et $\|\vec{\jmath}\| = 10\text{cm}$. On fera apparaître clairement les tangentes horizontales à la courbe et on précisera les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_F$ avec l'axe $(O, \vec{\imath})$.

Partie B : Deux fonctions définies par des intégrales

Dans toute cette partie, E désigne l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$. Si f appartient à E, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$I_f(x) = \int_0^1 f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t \qquad J_f(x) = \int_0^1 f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$$

Soit f une fonction appartenant à E.

6) Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que les deux réels $I_f(x)$ et $J_f(x)$ sont bien définis.
On dispose donc de deux fonctions I_f et J_f définies sur $\mathbb{R}$.

7) Déterminer la parité des fonctions I_f et J_f .

8) On se propose de calculer dans cette question les limites de I_f et J_f en $+\infty$ et en $-\infty$.

a) Établir que : $\forall x > 0, I_f(x) + iJ_f(x) = \dfrac{f(1)e^{ix} - f(0)}{ix} - \dfrac{1}{ix}\displaystyle\int_0^1 f'(t)e^{ixt}\,\mathrm{d}t.$

b) Expliquer rapidement pourquoi les fonctions f et f' sont bornées sur $[0,1]$.
On posera par la suite $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $M' = \sup\limits_{x\in[0,1]} f'(x)$.

c) En déduire qu'il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x > 0, |I_f(x) + iJ_f(x)| \leqslant \dfrac{A}{x}$.

d) Á l'aide de la question 8)c), calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (I_f(x) + iJ_f(x))$.
En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} I_f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} J_f(x)$.

e) En utilisant une propriété obtenue sur les fonctions I_f et J_f , calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} I_f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} J_f(x)$.

9) L'objectif de cette question est de prouver que les fonctions I_f et J_f sont continues sur $\mathbb{R}$.

a) Soient p et q deux réels. Rappeler la formule liant $\cos(p) - \cos(q)$ à $\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$.

b) Démontrer que : $\forall u \in \mathbb{R}, |\sin(u)| \leqslant |u|$ (on pourra par exemple utiliser l'inégalité des accroissements finis).

c) Soient x et y deux réels. Établir que : $|I_f(x) - I_f(y)| \leqslant |x-y| \displaystyle\int_0^1 t|f(t)|\,\mathrm{d}t.$

d) En déduire que la fonction I_f est continue sur $\mathbb{R}$.
Par un raisonnement analogue, on pourrait démontrer que la fonction J_f est continue sur $\mathbb{R}$ mais ce n'est pas demandé ici.

10) A l'aide d'une fonction f judicieusement choisie, établir un lien entre les fonctions F et G de la partie A, et les fonctions I_f et J_f de la partie B.

Exercice 2 (ATS 2011, exercice 3)

Les questions 3) et 4) sont indépendantes des questions 1) et 2)

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{x/2} \frac{dv}{\cos(v)}$ pour $x \in]-\pi, \pi[$.

1) **a)** Calculer $f'(x)$. Montrer que f est impaire et strictement croissante.

b) Donner un équivalent simple de $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right) = \sin u$ au voisinage de 0. En déduire que $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi^-} \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dv}{\sin v} = +\infty$, et que f est une bijection de $]-\pi,\pi[$ vers $\mathbb{R}$.
On note $g = f^{-1}$ et donc dans leurs domaines de définition on a $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$.

2) **a)** Montrer que $g'(y) = 2\ \cos\left(\dfrac{g(y)}{2}\right)$. Calculer $g''(y)$.

b) Montrer que $g(t)$ est solution de l'équation différentielle en t :

$$X''(t) + \sin(X(t)) = 0 \qquad \text{avec } t \geqslant 0,\ X(0) = 0,\ X'(0) = a > 0$$

pour une valeur de a à préciser.

3) Calculer $h(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{2\,du}{1-u^2}$ pour $t \in]-1,1[$. Indication : *Décomposer* $\dfrac{2}{1-u^2}$.

4) Dans l'intégrale définissant $f(x)$, on pose $u = \tan\left(\dfrac{v}{2}\right)$.

a) Exprimer v en fonction de u, puis dv en fonction de u et du.

b) Montrer que $\cos(v) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$. Indication : *on peut calculer d'abord* $\cos^2\left(\dfrac{v}{2}\right)$.

c) Faire le calcul de l'intégrale définissant $f(x)$ et en déduire une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 3 (ESC Chambéry, ECT)

On considère les matrices carrées A et B définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = A - 3I_3$$

1) **a)** Calculer B, B^2 et B^3.

b) En déduire B^k pour tout entier $k \geqslant 3$.

2) À l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $A^n = 3^n\left(I_3 + \dfrac{n}{3}B + \dfrac{n(n-1)}{18}B^2\right)$. Est-ce encore vrai pour $n \in \{0,1\}$?

3) On considère les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 1$, $w_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n + 2w_n, \qquad v_{n+1} = u_n + 3v_n, \qquad w_{n+1} = -u_n + 3w_n$$

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

b) Déduire des questions précédentes l'expression, pour tout entier naturel n, de u_n, v_n et w_n en fonctions de n, puis les limites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 (CAPES 2009, partiel)

A. Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t$.

1) **a)** Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t$ (cette question est indépendante des suivantes).

b) Calculer W_0 et W_1 et justifier que $W_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.

d) En déduire que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\geqslant 1}$ est constante de valeur $\dfrac{\pi}{2}$.

2) **a)** Montrer que la suite (W_n) est décroissante et que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{n-1}{n} \leqslant \dfrac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1$.

b) En déduire un équivalent de W_n (bien justifier).

3) Formule de Stirling

a) En utilisant la question 1)b), montrer que $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$. Exprimer W_{2p+1} en fonction de p.

b) Nous montrerons plus tard dans l'année (chapitre sur les séries numériques) que $n! \sim Kn^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$. À l'aide des questions précédentes, déterminer la constante K. Cet équivalent est appelé la *formule de Stirling*.

B. Volume d'une boule en dimension n

La notion d'intégrales doubles ainsi que la méthode de calcul par intégration successive (Fubini) se généralisent à toute dimension finie n.

Une partie $A_n \subset \mathbb{R}^n$ sera dite continûment paramétrable

- si $n = 1$ et A_1 est un segment
- ou si $n \geqslant 2$ et s'il existe une partie $A_{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ continûment paramétrable et deux fonctions continues $\varphi, \psi : A_{n-1} \to \mathbb{R}$ telles que

$$A_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in A_{n-1} \text{ et } \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant \psi(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$$

Avec ces notations, pour une fonction continue $f : A_n \to \mathbb{R}$, on définit

$$\int \cdots \int_{A_n} f(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_n \, \mathrm{d}x_{n-1} \ldots \mathrm{d}x_1 = \int \cdots \int_{A_{n-1}} \left(\int_{\varphi(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\psi(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n) \, \mathrm{d}x_n \right) \mathrm{d}x_{n-1} \ldots \mathrm{d}x_1$$

Le volume de A_n est l'intégrale ci-dessus avec $f = 1$. Ce qu'il faut retenir de tout ça, c'est que tout se passe comme dans le cas des intégrales doubles (mais on empile n couches au lieu de 2).

Soit $R > 0$ fixé, on note $\mathscr{B}_n$ la boule de centre 0 et de rayon R dans $\mathbb{R}^n$, et V_n son volume.

$$\mathscr{B}_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant R^2\}$$

1) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{B}_n \iff \begin{cases} (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathscr{B}_{n-1} \\ -\sqrt{R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2} \leqslant x_n \leqslant \sqrt{R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2} \end{cases}$$

En déduire, par récurrence sur $n \geqslant 1$ que $\mathscr{B}_n$ est continûment paramétrable.

2) Soit $\lambda > 0$ un réel et $m \geqslant 0$ un entier. Montrer, en se servant d'un changement de variable, que

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} (\lambda^2 - x^2)^{\frac{m}{2}} \, \mathrm{d}x = 2\lambda^{m+1} W_{m+1}$$

3) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ on a

$$V_n = 2^k \left(\prod_{i=1}^{k} W_i \right) \int \ldots \int_{\mathscr{B}_{n-k}} (R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-k}^2)^{\frac{k}{2}} \, \mathrm{d}x_{n-k} \ldots \mathrm{d}x_1$$

<u>Indication</u> : *On pourra, pour n fixé, faire une récurrence finie sur k.*

4) Prouver finalement que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$V_n = \left(\prod_{i=1}^{n} W_i \right) (2R)^n$$

et en déduire, à l'aide des résultats de la partie A, les expressions de V_{2p} et V_{2p+1}. Expliciter V_1, V_2, V_3 et V_4.

5) En utilisant la formule de Stirling, donner des équivalents simples de (V_{2p}) et (V_{2p+1}). En déduire que (V_n) converge et donner sa limite.

6) Montrer que, soit la suite (V_n) est décroissante, soit il existe un rang n_0 tel que la suite (V_n) soit croissante jusqu'en n_0, puis décroissante.

<u>Indication</u> : *On pourra calculer simplement le rapport V_{n+1}/V_n à l'aide des questions précédentes.*

7) Donner les valeurs de R pour lesquelles la suite (V_n) est décroissante.

8) Que vaut le rang n_0 de la question 6 quand $R = 1$?

FIN DE L'ÉPREUVE