Exercice 1
Tracer les courbes des exercices 5 et 6 (avec $a = 1$).

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \sin 2t \\ y & = & 1-\cos 2t \\ z & = & 2\cos t \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & t-\dfrac{t^3}{3} \\ y & = & t^2 \\ z & = & t+\dfrac{t^3}{3} \end{array}\right.$$

spacecurve

Exercice 2
On désigne par $\mathscr{C}'$ l'arc paramétré comme suit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos(2t)}} \\ y(t) & = & -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos(2t)}} \end{array}\right. \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$$

Déterminer le vecteur tangent (en fonction de t), une abscisse curviligne, le repère de Frenet et le rayon de courbure $R(t) = \dfrac{1}{\gamma(t)}$. Préciser l'allure de la branche infinie (limit) puis tracer $\mathscr{C}'$ (plot).

Exercice 3 (PT 2006, partie B, amélioré)
On se place dans le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit F et F' les deux points du plan $\mathscr{P}$ de coordonnées respectives $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.
On considère l'arc paramétré $\mathscr{C}$ ayant pour équation polaire :

$$\rho(\theta) = \sqrt{2\cos(2\theta)} \qquad ; \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$$

On oriente $\mathscr{C}$ dans le sens des θ croissants et on prend pour origine des arcs le point A de coordonnées cartésiennes $(\sqrt{2}, 0)$.

1) Tracer $\mathscr{C}$. On précisera les vecteurs directeurs des tangentes (dans le repère mobile) aux points de paramètres 0 et $\dfrac{\pi}{4}$.

2) (5/2) Déterminer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine plan délimité par $\mathscr{C}$ et le segment $[O, A]$.

3) **a)** Déterminer le repère de Frenet de l'arc $\mathscr{C}$ en $M(\theta)$, puis le rayon de courbure $R(\theta)$ en ce point.

b) $\boxed{\text{On définit le centre de courbure } C(t) \text{ au point } M(t) \text{ par la relation : } \overrightarrow{OC(t)} = \overrightarrow{OM(t)} + R(t)\overrightarrow{N(t)}.}$
En déduire les coordonnées $(x(\theta), y(\theta))$ du centre de courbure de $\mathscr{C}$ associé au point $M(\theta)$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de départ.

c) $\boxed{\text{On appelle développée de } \mathscr{C} \text{ la courbe } t \mapsto C(t).}$
Tracer la développée. Que constate-t-on ?

Exercice 4 (cardioïde)
Soit Γ d'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$.

1) Tracer Γ.

2) Calculer à l'aide de Maple les coordonnées du vecteur $\vec{T}$ dans le repère mobile, en déduire les angles φ puis α

3) Calculer le rayon de courbure R de Γ en M.

4) Déterminer en fonction de θ les coordonnées (cartésienne) du centre de courbure $C(\theta)$ de Γ en $M(\theta)$.

5) Soit $\Omega(2/3, 0)$. Dans le repère $(\Omega, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, trouver l'équation de Δ, développée de Γ. Tracer Δ.

6) Montrer que Δ est l'image de Γ par une transformation affine simple.

7) Rappeler une formule donnant $n+1$ éléments régulièrement espacés dans le segment $[a,b]$.

8) Toujours sur le même graphique, tracer les segments $[MC]$ pour environ 100 valeurs de θ, où $M \in \Gamma$ et $C \in \Gamma'$ est le centre de courbure associé. Indication : *on pourra utiliser la commande* **seq**
Que représente la droite (MC) ?

Exercice 5
Faire une procédure qui donne l'équation de l'enveloppe d'une famille de droites $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$.
Applications :

1) Enveloppe des droites D_t : $x\cos t + y \sin t - \cos^3 t$.

2) Enveloppe d'un diamètre du cercle de rayon 1 roulant sans glisser sur (Ox).

Exercice 6
On reprend la courbe Γ de l'exercice 7 :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & t + \sin t - 4\sin\frac{t}{2} \\ y(t) & = & 3 + \cos t - 4\cos\frac{t}{2} \end{array}\right. \qquad t \in [0, 4\pi]$$

1) Esquisse de la développée comme enveloppe des normales.

a) Soit D_t la normale à Γ en $M(t)$.
Donner une équation de D_t en fonction de $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$ et $y'(t)$.

b) Tracer Γ et 100 normales sur un même graphe.

c) Faite faire le calcul de l'équation de D_t par Maple à partir de la fonction $\overrightarrow{F}_M$.

2) **a)** Faire (à l'aide de Maple, bibliothèque **linalg**) le calcul de $s'(t)$, puis de $R(t)$.

b) Tracer sur une même figure les courbes Γ, sa développée Γ' et 100 segments $[MC]$.

Exercice 7
Équation et tracé de la développante du cercle unité.

Exercice 8
Faire une procédure qui donne les coordonnées du centre de courbure d'une courbe définie par $x(t)$ et $y(t)$.

Exercice 9
Le cercle unité est paramétré par $x = \cos t$ et $y = \sin t$. A tout point $M(t)$ du cercle, on associe le point $M' = M(2t)$ de paramètre $2t$.

1) Tracer à l'aide de Maple les segments $[M(t), M(2t)]$ et le cercle unité. Que conjecturez-vous quant à l'équation de l'enveloppe des droites (MM') ?

2) Construire l'enveloppe des droites (MM').