

# Programme de colle 12

Classe de PT

Semaine du lundi 5 au vendredi 9 décembre

## Liste des questions de cours

- Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $\lambda \in \text{Sp}(u) \implies P(\lambda) \in \text{Sp}(P(u))$ .
- Si  $A$  et  $B$  sont semblables, alors  $\chi_A = \chi_B$ .  $\text{Tr}(A)$  est somme des valeurs propres (même complexes) de  $A$  avec multiplicité.
- Suites récurrentes d'ordre  $p$  : comment se ramener à une suite récurrente d'ordre 1 dans  $\mathbb{K}^p$ . Solutions lorsque  $A$  possède  $p$  valeurs propres distinctes (sans preuve).
- Énoncer les CNS pour qu'un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  soit diagonalisable.

## 1 Réduction

### 1.1 Cas général

Valeurs propres et spectre. Vecteurs propres et Sous-espaces propres.

Une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.

Si  $P$  annule  $u$ , alors toute valeur propre de  $u$  est racine de  $P$ .

Cas des projections, des symétries et des endomorphismes nilpotents.

### 1.2 Dimension finie

Polynôme caractéristique, encadrement de la dimension d'un sous-espace propre.

CNS de diagonalisation (3 propositions).

CS de diagonalisation : cas de  $u \in \mathcal{L}(E)$  ayant  $n = \dim E$  valeurs propres distinctes.

CNS de trigonalisation. Cas complexe.

Si  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $E$  sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , la trace est la somme des valeurs propres (y compris les valeurs propres complexes), et le déterminant le produit des valeurs propres (idem).

### 1.3 Applications de la réduction

Calcul des puissances d'une matrice, d'une racine carré, d'un commutant.

Suites récurrentes linéaires dans  $\mathbb{R}^n$ . Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (étude complète), d'ordre  $p$  (structure des solutions, savoir se ramener à de l'ordre 1), systèmes d'équations différentielles linéaire d'ordre 1.