Programme de colle 11

Classe de PT

Semaine du lundi 28 novembre au vendredi 2 décembre

Liste des questions de cours
• $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix}$. Pour tout $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$. • Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et f définie par $f(M) = -M + \mathrm{Tr}\,(M)A$. Montrer que f est un endomorphisme, et selon la valeur de $\mathrm{Tr}\ A$, déterminer $\mathrm{Ker}\ f$ et $\mathrm{Im}\ f$. • Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(u) \Longrightarrow P(\lambda) \in \mathrm{Sp}\,(P(u))$. • Si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$. $\mathrm{Tr}\,(A)$ est somme des valeurs propres (même complexes) de A avec multiplicité.

1 Déterminants

1.1 d'une matrice

Déterminant d'une matrice, d'un produit de matrice, d'une transposée.
Calculs : opérations sur les colonnes et sur les lignes, déterminant d'une matrice triangulaire blocs, d'une matrice triangulaire. Développement par rapport à une colonne ou une ligne.

1.2 d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme u, de $u \circ v$, de u automorphisme.

1.3 de n vecteurs

Déterminant de n vecteurs d'un espace de dimension n dans une base. Caractérisation des bases.

2 Réduction

2.1 Cas général

Valeurs propres et spectre. Vecteurs propres et Sous-espaces propres.
Une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.
Si P annule u, alors toute valeur propre de u est racine de P.
Cas des projections, des symétries et des endomorphismes nilpotents.

2.2 Dimension finie

Polynôme caractéristique, encadrement de la dimension d'un sous-espace propre.
CNS de diagonalisation (3 propositions).
CS de diagonalisation : cas de $u \in \mathscr{L}(E)$ ayant $n = \dim E$ valeurs propres distinctes.
CNS de trigonalisation. Cas complexe.

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la trace est la somme des valeurs propres (y compris les valeurs propres complexes), et le déterminant le produit des valeurs propres (idem).