Programme de colle 6

Classe de PT

Semaine du lundi 14 au vendredi 18 octobre

Liste des questions de cours
• Limite en $+\infty$ de $x \mapsto \left[e - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{1/x}$. • Variations, limite et équivalent de la suite $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \,\mathrm{d}t$. • Intégrales de Bertrand : convergence de $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t}\,\mathrm{d}t$, où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

1 Fonctions continues par morceaux

Définition sur un segment. Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée. Définition sur un intervalle quelconque. Définition des fonctions $\mathscr{C}^n$ par morceaux.

2 Intégration sur un segment

2.1 Définition

Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier. Définition de l'intégrale via les fonctions en escalier.

2.2 Propriétés

Chasles, linéarité, croissance, inégalité triangulaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité de la moyenne.
Si f est continue et positive, alors $\int_{[a,b]} f = 0 \Longrightarrow f = 0$.

3 Calculs des primitives

3.1 Définition et propriétés

Primitive d'une fonction continue, cas d'une fonction continue par morceaux.
Intégration par parties, changement de variables, fonctions de la forme $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

3.2 Calculs

Primitives des fonctions usuelles. Méthodes pour affronter différents cas :
- Fractions rationnelles
- Polynôme $\times$ exponentielle et assimilés
- Fraction rationnelle en cos et sin. Règles de Bioche.

4 Intégrales sur un intervalle quelconque

4.1 Intégrale impropre

Définition d'une intégrale convergente, d'une intégrale divergente.
Cas d'une fonction prolongeable par continuité.

4.2 Le cas des fonctions positives

Fonctions usuelles au voisinage de $+\infty$ (Riemann et exponentielles). Fonctions usuelles au voisinage de 0 (Riemann). **Ces fonctions doivent être parfaitement connues, toute erreur est impardonnable**.
Relations de comparaison : $f \leqslant g$ et $f \sim g$.
Comparaison des primitives dans le cas divergent, des restes dans le cas convergent.

4.3 Intégrales absolument convergentes

Définition de la convergence absolue. Vocabulaire : fonction *intégrable*. Une intégrale absolument convergente est convergente.
Les théorèmes du chapitre précédents (changement de variable, Chasles, etc) restent valable pour des fonctions *intégrables* sur un intervalle quelconque.