

Programme de colle 5

Classe de PT

Semaine du lundi 7 au vendredi 11 octobre

Liste des questions de cours

- Les huit DL usuels.
- Limite en $+\infty$ de $x \mapsto \left[e - \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right]^{1/x}$.
- Variations, limite et équivalent de la suite $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, dt$.

Toute défaillance sur un DL usuel au cours de la colle entraînera une note en dessous de 5.

1 Fonctions d'une variable réelle

1.1 Taylor & Développements limités

1.1.1 Formules de Taylor sans relations de comparaison

Taylor Lagrange, Taylor reste intégral.

1.1.2 Relations de comparaison

Grand O , petit o , équivalents.

1.1.3 Développements limités

- Définition ; unicité ; exemple de fonction admettant un DL à un ordre supérieur à 1, sans être plus que dérivable ; Taylor-Young. Intégration et dérivation des DL.
- **Développements usuels** : \exp , \cos , \sin d'une part, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$ d'autre part doivent être parfaitement connus, de même que $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
Les DL des fonctions hyperboliques sh , ch , et réciproques, et de Arctan et Argth doivent pouvoir être retrouvés rapidement.
- DL d'une fonction réciproque, DL de la solution d'une équation différentielle.

2 Fonctions continues par morceaux

Définition sur un segment. Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée. Définition sur un intervalle quelconque. Définition des fonctions \mathcal{C}^n par morceaux.

3 Intégration sur un segment

3.1 Définition

Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier. Définition de l'intégrale via les fonctions en escalier.

3.2 Propriétés

Chasles, linéarité, croissance, inégalité triangulaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité de la moyenne.

Si f est continue et positive, alors $\int_{[a,b]} f = 0 \implies f = 0$.

4 Calculs des primitives

4.1 Définition et propriétés

Primitive d'une fonction continue, cas d'une fonction continue par morceaux.

Intégration par parties, changement de variables, fonctions de la forme $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$.

4.2 Calculs

Primitives des fonctions usuelles. Méthodes pour affronter différents cas :

- Fractions rationnelles
- Polynôme \times exponentielle et assimilés
- Fraction rationnelle en cos et sin. Règles de Bioche.