

# Programme de colle 5

Classe de PT

Semaine du lundi 7 au vendredi 11 octobre

Liste des questions de cours

- Les huit DL usuels.
- Limite en  $+\infty$  de  $x \mapsto \left[ e - \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \right]^{1/x}$ .
- Variations, limite et équivalent de la suite  $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, dt$ .

Toute défaillance sur un DL usuel au cours de la colle entraînera une note en dessous de 5.

## 1 Fonctions d'une variable réelle

### 1.1 Taylor & Développements limités

#### 1.1.1 Formules de Taylor sans relations de comparaison

Taylor Lagrange, Taylor reste intégral.

#### 1.1.2 Relations de comparaison

Grand  $O$ , petit  $o$ , équivalents.

#### 1.1.3 Développements limités

- Définition ; unicité ; exemple de fonction admettant un DL à un ordre supérieur à 1, sans être plus que dérivable ; Taylor-Young. Intégration et dérivation des DL.
- **Développements usuels** :  $\exp$ ,  $\cos$ ,  $\sin$  d'une part,  $\frac{1}{1-x}$ ,  $\frac{1}{1+x}$ ,  $\ln(1+x)$  et  $\ln(1-x)$  d'autre part doivent être parfaitement connus, de même que  $(1+x)^\alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  
Les DL des fonctions hyperboliques  $\operatorname{sh}$ ,  $\operatorname{ch}$ , et réciproques, et de  $\operatorname{Arctan}$  et  $\operatorname{Argth}$  doivent pouvoir être retrouvés rapidement.
- DL d'une fonction réciproque, DL de la solution d'une équation différentielle.

## 2 Fonctions continues par morceaux

Définition sur un segment. Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée. Définition sur un intervalle quelconque. Définition des fonctions  $\mathcal{C}^n$  par morceaux.

## 3 Intégration sur un segment

### 3.1 Définition

Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier. Définition de l'intégrale via les fonctions en escalier.

## 3.2 Propriétés

Chasles, linéarité, croissance, inégalité triangulaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité de la moyenne.

Si  $f$  est continue et positive, alors  $\int_{[a,b]} f = 0 \implies f = 0$ .

## 4 Calculs des primitives

### 4.1 Définition et propriétés

Primitive d'une fonction continue, cas d'une fonction continue par morceaux.

Intégration par parties, changement de variables, fonctions de la forme  $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ .

### 4.2 Calculs

Primitives des fonctions usuelles. Méthodes pour affronter différents cas :

- Fractions rationnelles
- Polynôme  $\times$  exponentielle et assimilés
- Fraction rationnelle en cos et sin. Règles de Bioche.