

# Programme de colle 4

Classe de PT

Semaine du lundi 30 septembre au vendredi 4 octobre

Liste des questions de cours

- La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$  si  $x > 0$  et  $f(x) = 0$  si  $x \leq 0$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Soit  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $\forall x \in I, f(x)^2 = 1$ . Montrer que  $f = 1$  ou  $f = -1$ .
- Les huit DL usuels.

Toute défaillance sur un DL usuel au cours de la colle entraînera une note en dessous de 5.

## 1 Fonctions d'une variable réelle

### 1.1 Continuité

Définition ; propriétés ; caractérisation séquentielle ; «  $f$  continue sur un segment  $[a, b]$  est bornée et atteint ses bornes » ; théorème des valeurs intermédiaires ; fonctions réciproques.

### 1.2 Dérivabilité

Définition ; propriétés ; fonctions réciproques ; théorème de Rolle et ses conséquences (égalité et inégalité des accroissements finis, etc).

### 1.3 Taylor & Développements limités

#### 1.3.1 Formules de Taylor sans relations de comparaison

Taylor Lagrange, Taylor reste intégral.

#### 1.3.2 Relations de comparaison

Grand  $O$ , petit  $o$ , équivalents.

#### 1.3.3 Développements limités

- Définition ; unicité ; exemple de fonction admettant un DL à un ordre supérieur à 1, sans être plus que dérivable ; Taylor-Young. Intégration et dérivation des DL.
- **Développements usuels** :  $\exp$ ,  $\cos$ ,  $\sin$  d'une part,  $\frac{1}{1-x}$ ,  $\frac{1}{1+x}$ ,  $\ln(1+x)$  et  $\ln(1-x)$  d'autre part doivent être parfaitement connus, de même que  $(1+x)^\alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  
Les DL des fonctions hyperboliques  $\operatorname{sh}$ ,  $\operatorname{ch}$ , et réciproques, et de  $\operatorname{Arctan}$  et  $\operatorname{Argth}$  doivent pouvoir être retrouvées rapidement.
- DL d'une fonction réciproque, DL de la solution d'une équation différentielle.