Programme de colle 22

Classe de PT

Semaine du lundi 24 au vendredi 28 mars

Liste des questions de cours
• Rayon de $\sum \frac{\operatorname{ch}(n)}{n} z^{2n}$ et DSE en 0 de $\frac{\ln(1+x)}{x}$. • Énoncé des théorèmes de Dirichlet et Parseval. • La famille des $c_n : x \mapsto \cos(n\omega x)$ et $s_n : x \mapsto \sin(n\omega x)$ est orthogonale pour le produit scalaire usuel sur $\mathscr{C}^0_T(\mathbb{R})$. Norme des c_n et s_n (un calcul de chaque type). • L'application $(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ n'a pas de limite en $(0, 0)$. L'application $(x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ et $(0, 0) \mapsto 0$ est continue en $(0, 0)$. • Théorème sur les extrema (en fonction de r, t et s).

1 Séries entières

1.1 Variable complexe

Rayon de convergence. Exponentielle complexe.

1.2 Variable réelle

Continuité, intégration terme à terme, dérivation terme à terme de la fonction somme. Comportement au bord. Unicité du développement en série entière (application : résolution d'équations différentielles).

1.3 Séries entières usuelles

À connaître impérativement, et à savoir reconnaître, au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1-x}, \quad \frac{1}{1+x}, \quad \ln(1+x), \quad e^x, \quad \operatorname{ch}(x), \quad \operatorname{sh}(x), \quad \cos(x), \quad \sin(x), \quad (1+x)^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

2 Séries de Fourier

2.1 Coefficients et sommes partielles

Coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ d'une fonction T-périodique f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Sommes partielles $S_N(f)(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{N} [a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)]$.

2.2 Théorèmes

Formule de Parseval. Théorème de Dirichlet. Cas où f est continue.

3 Fonctions de plusieurs variables

3.1 Topologie et continuité

Norme et distance euclidienne dans $\mathbb{R}^m$. Définitions des boules, des parties ouvertes, des parties fermées, des parties bornées.

Limite d'une suite d'éléments à valeurs dans $\mathbb{R}^m$; caractérisation à l'aide des suites coordonnées. Toute suite convergente est bornée. Opérations algébriques (ne pas être trop technique).
Fonctions continues de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^m$, opérations algébriques, composition. L'image d'un fermé borné par une application continue est continue.

3.2 Calcul différentiel

Applications $\mathscr{C}^1$, matrice jacobienne, différentielle. Gradient.
Formule de composition, traduction matricielle. Cas des $\mathscr{C}^1$ difféomorphismes. Applications aux EDP.
Dérivées partielles d'ordre supérieur, théorème de Schwarz.
Fonctions de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert dans $\mathbb{R}$: formule de Taylor-Young à l'ordre 2, application à l'étude des extrema locaux.