Programme de colle 21

Classe de PT

Semaine du lundi 17 au vendredi 21 mars

Liste des questions de cours
• Preuve du critère des séries alternées, avec corollaires (encadrement de la somme, signe et majoration du reste). • Nature de la série $u_n = (-1)^n \sqrt{n} \sin(\frac{1}{n})$. • Rayon de $\sum \frac{\mathrm{ch}\,(n)}{n} z^{2n}$ et DSE en 0 de $\frac{\ln(1+x)}{x}$. • Énoncé des théorèmes de Dirichlet et Parseval. • La famille des $c_n : x \mapsto \cos(n\omega x)$ et $s_n : x \mapsto \sin(n\omega x)$ est orthogonale pour le produit scalaire usuel sur $\mathscr{C}^0_T(\mathbb{R})$. Norme des c_n et s_n (un calcul de chaque type).

1 Séries numériques

1.1 Généralités

Vocabulaire : terme général, somme partielle, reste. Série convergente et divergente. Les séries convergentes forment un espace vectoriel. Séries télescopiques.

1.2 Séries à termes positifs

Séries usuelles (Riemann, géométriques), relations de comparaison (majoration, $\sim$), critère de d'Alembert. Comparaison série - intégrale.

1.3 Convergence absolue

1.4 Séries alternées

Définition, critère des séries alternées, encadrement de la somme et majoration du reste.

2 Séries entières

2.1 Variable complexe

Rayon de convergence. Exponentielle complexe.

2.2 Variable réelle

Continuité, intégration terme à terme, dérivation terme à terme de la fonction somme. Comportement au bord.
Unicité du développement en série entière (application : résolution d'équations différentielles).

2.3 Séries entières usuelles

À connaître impérativement, et à savoir reconnaître, au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1-x}, \quad \frac{1}{1+x}, \quad \ln(1+x), \quad e^x, \quad \mathrm{ch}\,(x), \quad \mathrm{sh}\,(x), \quad \cos(x), \quad \sin(x), \quad (1+x)^\alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

3 Séries de Fourier

3.1 Coefficients et sommes partielles

Coefficients de Fourier $a_n(f)$ et $b_n(f)$ d'une fonction T-périodique f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Sommes partielles $S_N(f)(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{N} [a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)]$.

3.2 Théorèmes

Formule de Parseval. Théorème de Dirichlet. Cas où f est continue.