

Programme de colle 18

Classe de PT

Semaine du lundi 10 au vendredi 14 février

Liste des questions de cours

- Sur $E = \mathbb{R}[X]$, $\varphi : (P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t) dt$ est un produit scalaire.
- Sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi : (P, Q) \mapsto \text{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire.
- Liberté des familles orthogonales de vecteurs non nuls
- Un projecteur p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E \|p(x)\| \leq \|x\|$.

1 Algèbre bilinéaire

1.1 Préhilbertiens

Définition d'un produit scalaire, norme associée, propriétés de la norme.

Inégalité de Cauchy-Schwarz, identité du parallélogramme, Théorème de Pythagore.

Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, famille orthogonale. Orthogonal d'un sous-espace.

1.2 Euclidiens

Existence de bases orthonormales ; méthode de Schmidt. Calculs dans une base orthonormale.

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie ; distance à un tel sous-espace.

Principe des méthodes de moindres carrés.

1.3 Isométries

Définition et valeurs propres d'une isométrie (ou endomorphisme orthogonal). Groupe $\mathcal{O}(E)$.

Définition et déterminant d'une matrice orthogonale. Groupes $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$.

Description dans le cas des dimensions 2 et 3, études pratiques. En particulier détermination de l'axe et de l'angle d'une rotation de \mathbb{R}^3 .