Programme de colle 14

Classe de PT

Semaine du lundi 6 au vendredi 10 janvier

Liste des questions de cours
• Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si λ est une valeur propre de u, alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$. • Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ et f définie sur $\mathbb{R}_{2n}[X]$ par $f(P)(X) = (X-a)(X-b)P'(X) - (2nX - n(a+b) + c)P(X)$. Montrer que f est un endomorphisme, dont on déterminera les éléments propres. • Soit $\Delta : \ell^\infty(\mathbb{R}) \to \ell^\infty(\mathbb{R})$ défini par $\Delta(u)_n = u_{n+1} - u_n$. Valeurs propres et vecteurs propres de Δ.

1 Réduction

1.1 Cas général

Valeurs propres et vecteurs propres. Sous-espaces propres. Un famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. Si P annule u, alors toute valeur propre de u est racine de P.
Cas des projections, des symétries et des endomorphismes nilpotents.

1.2 Dimension finie

Polynôme caractéristique, encadrement de la dimension d'un sous-espace propre (preuve exigible).
CNS de diagonalisation. CS de diagonalisation : cas de χ_u scindé à racines simples.
CNS de trigonalisation. Cas complexe. Savoir trigonaliser un endomorphisme en dimension 3 dans le cas de 2 valeurs propres distinctes.
Si $u \in \mathscr{L}(E)$, E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la trace est la somme des valeurs propres (y compris les valeurs propres complexes), et le déterminant le produit des valeurs propres (idem).

1.3 Applications de la réduction

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2, suites récurrentes linéaires dans $\mathbb{R}^n$, systèmes d'équations différentielles, puissances de matrices.