Programme de colle 13

Classe de PT

Semaine du lundi 16 au vendredi 20 décembre

Liste des questions de cours
• Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et f définie par $f(M) = -M + \mathrm{Tr}\,(M)A$. Montrer que f est un endomorphisme, et selon la valeur de Tr A, déterminer Ker f et Im f. • $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix}$. • Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Si λ est une valeur propre de u, alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$.

1 Déterminant

1.1 de n vecteurs

Déterminant de n vecteurs d'un espace de dimension n dans une base. Caractérisation des bases.

1.2 d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme u, de $u \circ v$, de u automorphisme.

1.3 d'une matrice

Déterminant d'une matrice, d'un produit de matrice, d'une transposée.
Calculs : opérations sur les colonnes et sur les lignes, déterminant d'une matrice triangulaire blocs, d'une matrice triangulaire. Développement par rapport à une colonne ou une ligne.

2 Réduction

2.1 Cas général

Valeurs propres et vecteurs propres. Sous-espaces propres. Un famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. Si P annule u, alors toute valeur propre de u est racine de P.
Cas des projections, des symétries et des endomorphismes nilpotents.

2.2 Dimension finie

Polynôme caractéristique, encadrement de la dimension d'un sous-espace propre (preuve exigible).
CNS de diagonalisation. CS de diagonalisation : cas de χ_u scindé à racines simples.
CNS de trigonalisation. Cas complexe. Savoir trigonaliser un endomorphisme en dimension 3 dans le cas de 2 valeurs propres distinctes.
Si $u \in \mathscr{L}(E)$, E sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la trace est la somme des valeurs propres (y compris les valeurs propres complexes), et le déterminant le produit des valeurs propres (idem).

Bonnes vacances !