Programme de colle 11

Classe de PT

Semaine du lundi 2 au vendredi 6 décembre

Liste des questions de cours
• Interpolation de Lagrange : Pour tout $(a_i) \in \mathbb{R}^{n+1}$ deux à deux distincts et tout $(b_i) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(a_i) = b_i\ \forall i$ (avec preuve). Expression de P (sans preuve). • Soit $E = E_1 \oplus E_2$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\dim E_1 = p$, $\dim E_2 = q$. Alors $u \in \mathscr{L}(E)$ laisse stable E_1 et E_2 si et seulement si il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}\,(u, \mathscr{B}) = \left(\begin{array}{c\|c} M_1 & 0 \\ \hline 0 & M_2 \end{array}\right)$ avec$M_1 \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ et $M_2 \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$. • $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$.

1 Généralités sur les espaces vectoriels

1.1 Structure algébrique

Caractérisation d'un sous-espace vectoriel, d'un morphisme d'espace vectoriel.
Caractérisation de $\mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_k)$ à l'aide des combinaisons linéaires.
Sommes, sommes directes de deux sous-espaces vectoriels.

1.2 Familles et bases, dimension finie

Définition des familles libres, familles liées, famille génératrices, bases.
Définition d'un espace vectoriel de dimension finie. Théorème de base incomplète. Relation entre bases et sommes directes.
Caractérisation de $F = F_1 \oplus F_2$ et de $\mathscr{F}$ est une base, dans un espace vectoriel de dimension finie.
Rang d'une famille de vecteurs.
Morphismes et bases : si $(e_i)_{i \in I}$ est une base de E, alors $u : E \to E'$ est entièrement déterminé par la famille $(u(e_i)_{i \in I})$. Caractérisation des injections, surjections et bijections. Projecteurs, symétries.
$\boxed{\textbf{Théorème du rang}}$.

2 Matrices

Matrice d'une application linéaire, rang d'une matrice, produit matriciel, transposition, matrices de passage, Formule de changement de base, matrices semblables. Matrices triangulaires. Matrices blocs. Trace d'une matrice, d'un endomorphisme.