

Exercice 1

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 2

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I, f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 3 (Petites mines)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$.

- 1) Montrer que l'équation $f(x + \frac{1}{2}) = f(x)$ possède au moins une solution.
- 2) Montrer que $\forall n \geq 2, f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$ possède au moins une solution.

Exercice 4 1) Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[, \operatorname{Arctan}(x) = \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$.

2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1], \operatorname{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2} \operatorname{signe}(x) + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$.

3) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, il existe des suites $(A_n), (B_n)$ et (θ_n) telles que

$$\operatorname{Arctan}(x) = A_n + B_n \operatorname{Arctan}(\theta_n) \quad \text{avec } |B_n| \leq \frac{1}{2^n}$$

4) En déduire un algorithme de calcul de $\operatorname{Arctan}(x)$ à ε près.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x + 2x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ pour $x \neq 0$.

Étudier la dérivabilité de f , la continuité de f' .

Exercice 6

Domaine de définition et dérivée des fonctions suivantes :

- 1) $f(t) = \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right)$
- 2) $f(t) = \operatorname{Arcsin}(2t\sqrt{1-t^2})$
- 3) $f(t) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2t^2}\right)$

Exercice 7

Soit $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit $f :]-a, a[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction paire de classe \mathcal{C}^n .

Montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $f^{(k)}$ a la parité de k .

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$.

- 1) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* . Calculer f' sur \mathbb{R}^* , en déduire que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
- 2) On se place sur $]0, +\infty[$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$, la dérivée n -ième de f , est de la forme $P_n(1/x) \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$, où P_n est un polynôme. (sans hypothèse sur $\deg P_n$).
- 3) En déduire que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
- 4) Des fonctions \mathcal{C}^∞ à support dans un segment.
 - a) Soit $[a, b]$ un segment. Montrer qu'il existe une fonction g de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} telle que g est nulle hors de $]a, b[, g > 0$ sur $]a, b[$.
 - b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que l'on peut trouver g vérifiant les hypothèses précédentes et de plus $g = 1$ sur $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$. Indication : *Penser aux primitives.*
- 5) Le but de cette question est de trouver des fonctions qui admettent un DL mais ne sont pas \mathcal{C}^1 .
 - a) Montrer que $f(x) = o(x^n)$ en $x = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - b) Construire une fonction g qui admet un DL en 0 à l'ordre n pour tout n et qui n'est pas \mathcal{C}^1 .
Indication : *On pourra s'inspirer de la fonction de l'exercice 5.*

Exercice 9 (Développements limités)

Donner le DL à l'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$$\mathbf{1)} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) \quad \mathbf{2)} (1+2x)^{\frac{1}{1+x}} \quad \mathbf{3)} \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} \quad \mathbf{4)} e^{\operatorname{sh} x} - \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$$

Donner le DL à l'ordre indiqué et au point indiqué des fonctions suivantes :

$$\mathbf{5)} (x^3+x)^{1/3} - (x^3-x)^{1/3} \text{ ordre 4 en } +\infty \quad \mathbf{6)} \ln(2 \sin x) \text{ ordre 3 en } \frac{\pi}{6}$$

Exercice 10 (Limites)

Donner la limite en 0^+ de $\frac{x^{(x^x)} \ln x}{x^x - 1}$