

Exercice 1 1) Simplifier la somme suivante : $S_n = \sum_{k=2}^n \ln \left(1 - \frac{1}{k^2} \right)$, pour $n \geq 2$.

2) Déterminer trois réels a, b et c tels que $\forall k > 0, \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.

En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Simplifier la somme suivante : $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{k^3 - k + 2}{k^2 - 1}$, pour $n \geq 2$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 \text{1) } S_n^{(1)} = \sum_{k=0}^n \cos(kx) & \text{2) } S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^n \cos(kx) & \text{3) } S_n^{(3)} = \sum_{k=0}^n \sin(kx) & \text{4) } S_n^{(4)} = \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(kx) \\
 \text{5) } S_n^{(5)} = \sum_{k=0}^n \operatorname{sh}(kx) & \text{6) } S_n^{(6)} = \sum_{k=0}^n k^2 \cos(kx) & \text{7) } S_n^{(7)} = \sum_{k=0}^n \cos^3(kx) &
 \end{array}$$

Exercice 3 1) Déterminer l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que les expressions suivantes soient définies, puis montrer que $\tan(x) = -\frac{2}{\tan(2x)} + \frac{1}{\tan(x)}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme suivante : $S_n = \sum_{k=0}^n 2^k \tan(2^k x)$.

Exercice 4 1) Démontrer que, pour tous réels a et b tels que $ab \neq 1$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan} \left(\frac{a+b}{1-ab} \right) + k\pi$$

2) Calculer $S = \operatorname{Arctan}(1) + \operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3)$.

Exercice 5 1) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, pour tout réel t , $\cos\left(\frac{t}{2}\right) \cos(kt)$ sous forme d'une somme.

2) En déduire que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sum_{k=1}^n (-1)^k \cos(kt) = \frac{1}{2} \left((-1)^n \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right)$$

3) Soit $U_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\sin k}{k}$. Montrer que $U_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)} dt - \frac{1}{2}$.

4) Montrer que, pour toute fonction f de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t) dt = 0$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $I = \{1, \dots, n\}$. Calculer les sommes suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 \text{1) } S_1 = \sum_{(i,j) \in I^2} ij & \text{2) } S_2 = \sum_{(i,j) \in I^2} i + j & \text{3) } S_3 = \sum_{(i,j) \in I^2} \inf(i, j) & \text{4) } S_4 = \sum_{(i,j) \in I^2} |i - j|
 \end{array}$$

Exercice 7

À l'aide de la formule du binôme pour $(1+x)^n$, calculer les sommes suivantes :

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{1)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} & \mathbf{2)} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} & \mathbf{3)} \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} & \mathbf{4)} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \\
\mathbf{5)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{2k} & \mathbf{6)} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{2k} & &
\end{array}$$

Exercice 8 (Théorème de Fermat) **1)** Montrer que, pour tout nombre premier p , et tout $k \in \{1, \dots, p-1\}$, $k \binom{p}{k} = p \binom{p-1}{k-1}$. En déduire que p divise $\binom{p}{k}$ dans ce cas.

2) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}$ et tout nombre premier $p \mid (a^p - a)$ On pourra raisonner par récurrence sur a .

Exercice 9

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\sum_{j=k}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Exercice 10

Soit $M = \left(\binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. (On pose $\binom{j}{i} = 0$ si $j < i$).

Calculer M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis tout $k \in \mathbb{Z}$.