Exercices : Trigonométrie et dénombrement

Exercice 1 **1)** Simplifier la somme suivante : $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$, pour $n \geqslant 2$.

2) Déterminer trois réels a, b et c tels que $\forall k > 0$, $\quad \dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$.

En déduire la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Simplifier la somme suivante : $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k^3 - k + 2}{k^2 - 1}$. pour $n \geqslant 2$.

Exercice 2
Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes suivantes :

1) $S_n^{(1)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ **2)** $S_n^{(2)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$ **3)** $S_n^{(3)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$ **4)** $S_n^{(4)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx)$

5) $S_n^{(5)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(kx)$ **6)** $S_n^{(6)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \cos(kx)$ **7)** $S_n^{(7)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^3(kx)$

Exercice 3 **1)** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\operatorname{th}(x) = \dfrac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \dfrac{1}{\operatorname{th}(x)}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$. Calculer la somme suivante : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \operatorname{th}(2^k x)$.

Exercice 4 **1)** Démontrer que, pour tous réels a et b tels que $ab \neq 1$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} b = \operatorname{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + k\pi$$

2) Calculer $S = \operatorname{Arctan}(1) + \operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(3)$.

Exercice 5 **1)** Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer, pour tout réel t, $\cos\left(\dfrac{t}{2}\right)\cos(kt)$ sous forme d'une somme.

2) En déduire que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \cos\left(\frac{t}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos(kt) = \frac{1}{2}\left((-1)^n\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) - \cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

3) Soit $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\sin k}{k}$. Montrer que $U_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}$.

4) Montrer que, pour toute fonction f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$, $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t = 0$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 6
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $I = \{1, \ldots, n\}$. Calculer les sommes suivantes :

1) $S_1 = \displaystyle\sum_{(i,j)\in I^2} ij$ **2)** $S_2 = \displaystyle\sum_{(i,j)\in I^2} i + j$ **3)** $S_3 = \displaystyle\sum_{(i,j)\in I^2} \inf(i, j)$ **4)** $S_4 = \displaystyle\sum_{(i,j)\in I^2} |i - j|$

Exercice 7
À l'aide de la formule du binôme pour $(1+x)^n$, calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ **2)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ **3)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$ **4)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$

5) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2k\leqslant n}\binom{n}{2k}$ **6)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{2k\leqslant n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{2k}$

Exercice 8 (Théorème de Fermat) **1)** Montrer que, pour tout nombre premier p, et tout $k \in \{1, \ldots, p-1\}$, $k\binom{p}{k} = p\binom{p-1}{k-1}$. En déduire que p divise $\binom{p}{k}$ dans ce cas.

2) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{N}$ et tout nombre premier p $p|(a^p - a)$ On pourra raisonner par récurrence sur a.

Exercice 9

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $\displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Exercice 10

Soit $M = (\binom{j}{i})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice de $\mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. (On pose $\binom{j}{i} = 0$ si $j < i$).

À l'aide d'une application linéaire bien choisie, calculer M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis tout $k \in \mathbb{Z}$.