Exercices : Suites et séries de fonctions

Exercice 1 (Convergences uniforme de suites : pratique) **1)** Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $I = [0,1]$ par

$$f_n(x) = x^n(1-x)$$

2) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $I = \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \operatorname{Arctan}(nx)$$

On essayera d'éviter tout calcul de norme infinie.

3) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $I =]0,1]$ par

$$f_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{x}\right)$$

4) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $I = \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{nx^2+1}{n+1}$$

On étudiera aussi la convergence uniforme sur $[-a,a]$ pour $a > 0$ assez grand (à déterminer).

5) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $I = \mathbb{R}_+$, par

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Étudier la convergence sur tout segment de $\mathbb{R}_+$. Indication : *On peut se contenter des* $[0,A]$.

Exercice 2

Soit $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = x + 1/n$$

Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément mais pas (f_n^2).

Exercice 3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f_n : I \to \mathbb{R}_+$ une suite de fonctions qui convergent uniformément vers $f : I \to \mathbb{R}_+$.

1) Rappeler l'inégalité des accroissement fini dans le cas de $\varphi(u) = \ln(1+u)$ entre deux réels positifs.

2) Montrer que $(\ln(1+f_n))_n$ converge uniformément vers $\ln(1+f)$.

Exercice 4 (Suites et intégrales) **1)** Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $I = \mathbb{R}_+$, par

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + n2^n x^2}$$

On évitera un calcul de norme infinie en étudiant $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

2) Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f_n(x) = \sin^n x$.

Étudier la limite de la suite $\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,\mathrm{d}t\right)$.

3) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Calculer la limite de la suite $\left(n \int_0^1 e^{-nx} f(x)\,\mathrm{d}x\right)$.

Exercice 5 (Suites et dérivées)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$.

1) Étudiez la convergence uniforme de (f_n).

2) Les fonctions (f_n) sont-elles dérivables ?

3) A-t-on convergence de la suite des (f_n') ? Que se passe-t-il sur un segment de la forme $[-a, a]$ avec $a > 0$.

Exercice 6
Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

1) $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^{n+2}} \, \mathrm{d}x$

2) $v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n + e^x}$

3) $w_n = n \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x/n)}{x(1 + x^2)} \, \mathrm{d}x$

Exercice 7 (Convergences de séries : pratique)
Domaine de définition et domaine de convergence normale des séries de fonctions $\sum f_n$, pour les f_n suivantes. On précisera l'intervalle sur lequel la fonction somme est continue.

1) $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$, avec $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$.

2) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$, avec $n \geqslant 1$ et $x \in \mathbb{R}$.

3) $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^{2n}}$ avec $x \in \mathbb{R}_+$. On comparera $S(x)$ et $S(1/x)$.

Exercice 8
Pour $x \in]0, +\infty[$ fixé, on définit $\varphi : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \dfrac{1}{t(t + x)}$.

Pour $n \geqslant 1$, on définit $f_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{n(n + x)}$.

1) Nature et valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t) \, \mathrm{d}t$.

2) Domaine de définition de la séries de fonctions $\sum f_n$. On note $S(x)$ sa somme.

3) Continuité de S (on précisera l'intervalle).

4) A l'aide d'un encadrement, montrer que $S(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x}$.

Exercice 9
Soit $u_n(x) = \dfrac{1}{n} e^{-nx}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$.

1) Déterminer l'ensemble de définition I de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

2) Montrer que S est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. En déduire que S est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et exprimez S' sans symbole de sommation.

3) Montrer que S est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Indication : *Montrer que S est $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé.*

4) Déduire S de l'expression de S' et d'un calcul judicieusement choisi.

Exercice 10
Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + x}$$

1) Justifier que S est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. (fait en cours)

2) Préciser le sens de variation de S.

3) Établir

$$\forall x > 0, \qquad S(x + 1) + S(x) = 1/x$$

4) Donner un équivalent de S en 0.

5) Donner un équivalent de S en $+\infty$. <u>Indication</u> : *S'inspirer de l'exercice* $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, \mathrm{d}t$.

Exercice 11 (Fonction vérifiant une équation arbitraire)
On définit (u_n) suite de fonctions de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ par

$$u_0(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t$$

1) Montrer que, pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant t - t^2 \leqslant t \leqslant 1$. <u>Indication</u> : *Faire au besoin un tableau de variations de $h(t) = t - t^2$.*

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in [0,1], \qquad 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

3) Étudier la convergence simple de la série $\sum v_n$, où $v_n = u_{n+1} - u_n$, sur $[0,1]$. En déduire la convergence de la suite $(u_n(x))$ pour tout $x \in [0,1]$.

4) Établir que la suite (u_n) converge uniformément vers une fonction u non nulle vérifiant

$$u'(x) = u(x - x^2)$$

Exercice 12
Soit $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \geqslant 1$.

1) Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. On note S sa somme.

2) Soit $a = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Montrer que, au voisinage de $+\infty$,

$$S(x) - \frac{a}{\sqrt{x}} = O\Big(\frac{1}{x\sqrt{x}}\Big)$$

<u>Indication</u> : *Penser à la quantité conjuguée.*

Exercice 13 (Fonction zêta – Centrale PC 2018)
On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

On note D_ζ son ensemble de définition.

1) Déterminer D_ζ.

2) Montrer que ζ est continue sur D_ζ.

3) Etudier le sens de variations de ζ.

4) Justifier que ζ admet une limite en $+\infty$.

5) Soit $x \in D_\zeta$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Montrer : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$.

6) En déduire, que pour tout $x \in D_\zeta$,

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}.$$

7) Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.

8) Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

9) Donner l'allure de la courbe représentative de ζ.

Exercice 14
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons
$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $u_n(x) = xe^{-nx}$. Montrer que u_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et que
$$\int_0^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

2) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Exercice 15
Le but de cet exercice est de montrer que
$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$

Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,\mathrm{d}x$.

1) Montrer que I converge.

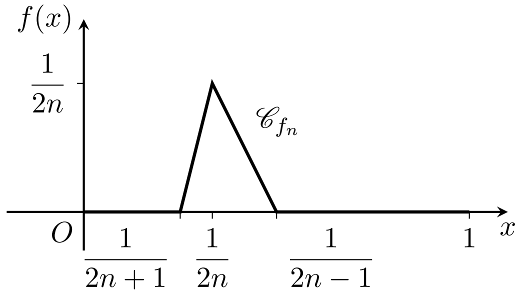
2) À l'aide de l'égalité (que l'on montrera lors du cours sur les séries entières) $e^u = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, montrer que
$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 (-x\ln x)^n\,\mathrm{d}x$$

3) Soit $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p \ln^q x\,\mathrm{d}x$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$, avec $p > 0$ si $q > 0$.
Obtenir une relation entre $I_{p,q}$ et $I_{p,q-1}$. En déduire $I_{n,n}$.

4) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

5) Sur le même modèle, déterminer une expression de $\displaystyle\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x$ sous forme d'une série numérique.

Exercice 16 (Convergence absolue uniforme)
Pour $n \geqslant 2$ on définit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = 0$ sauf sur $\left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n-1}\right]$ où son graphe forme un triangle de hauteur $\frac{1}{2n}$ en $x = \frac{1}{2n}$.



1) Montrer que la série de terme général f_n ne converge pas normalement.

2) Montrer que cette série converge uniformément absolument, c'est-à-dire que $\sum |f_n|$ converge uniformément, sur $[0,1]$.