Exercices : Suites

Exercice 1
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente, de limite ℓ. Étudier $(|u_n|)$ (écrire la définition de la limite, avec des ε).

Exercice 2
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite.

1) Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, est-ce que (u_n) converge ?

2) Si (u_{2n}), (u_{3n}) et (u_{2n+1}) convergent, est-ce que (u_n) converge ?

Exercice 3
Soit (u_n) une suite décroissante dont une suite extraite converge. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 4 (Cesàro) **1)** Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de limite nulle. Montrer que $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge vers 0.

2) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergeante, de limite ℓ. Montrer que $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge vers ℓ. On pourra se ramener à $\ell = 0$ pour appliquer le 1).

3) La réciproque du théorème précédent est-elle vraie ?

Exercice 5
Convergence et limites éventuelles des suites suivantes :

1) $u_n = (-1)^n (\ln n)^{(-1)^n}$ **2)** $u_n = \cos\left(\dfrac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right)$ **3)** $u_n = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ $x \in \mathbb{R}$

4) $u_n = \dfrac{n^p}{n!}$ où $p \in \mathbb{N}$ fixé. **5)** $u_n = \left(\dfrac{5}{\sqrt{n}} + \dfrac{2}{3}\sin n\right)^n$ **6)** $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$

Exercice 6 **1)** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \sin x$.
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in]0, \pi[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, \pi]$ (<u>Indication</u> : *Montrer* $f([0,\pi]) \subset [0,\pi]$).

b) Montrer que (u_n) est croissante (<u>Indication</u> : *Étude de* $f(x) - x$).

c) En déduire que (u_n) converge, et déterminer sa limite.

2) Sur le même modèle, étudier les suites suivantes. On pourra commencer par résoudre $f(x) = x$ pour distinguer des cas.

a) $u_0 \in [-3/2, +\infty[$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$. **b)** $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(4 - u_n^2)$

c) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{1}{u_n}$

Exercice 7 **1)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x$. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution dans $[0, 1]$. On notera ℓ cette solution.

c) Montrer que $\exists k \in [0, 1[/ \forall n \in \mathbb{N}\ |u_{n+1} - \ell| \leqslant k|u_n - \ell|$.

d) En déduire que (u_n) converge vers ℓ.

2) Sur le même modèle, étudier les suites suivantes

a) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = e^{-u_n}$ **b)** $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \dfrac{3}{2u_n^2 + 1}$

Exercice 8 **1)** Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

2) En déduire les limites des suites suivantes :

a) $v_n = \sqrt[n]{\dfrac{n!}{n^n}}$ **b)** $w_n = \dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n!}}$.

Exercice 9 (Vrai-Faux)
Soit (u_n) et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (et le prouver) :

1) (u_n) majorée $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe.

2) $(|u_n|)$ converge $\Longrightarrow (u_n)$ converge.

3) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'ayant pas de limite en $+\infty$. $\lim u_n = +\infty \Longrightarrow (f(u_n))$ n'a pas de limite en $+\infty$.

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

5) $(\forall n \in \mathbb{N}\ |u_n| \leqslant |v_n|$ et (v_n) converge$) \Longrightarrow (u_n)$ converge.

6) $\forall (u_n)\ u_n \sim u_{n+1}$. Puis sous les hypothèses suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$; (u_n) converge.

7) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(U_{n+1} - U_n) = 0$ (et réciproquement ?)

8) $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ converge $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. (et réciproquement ?)

Exercice 10
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite définie, lorsque c'est possible, par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 2}{u_n + 5}$.

1) Pour quelles valeurs de u_0 la suite est-elle constante ?

2) Montrer que si $u_0 \neq -2$, alors $u_n \neq -2\ \forall n \in \mathbb{N}$.

3) On suppose $u_0 \neq -2$ et on définie $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$. Étudier (v_n), en déduire l'expression de u_n en fonction de n et finir l'étude de (u_n).

4) Pour quels u_0 la suite (u_n) est-elle définie ?

Exercice 11
Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ fixés. On considère les suites définies par $\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$.
Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes de même limite.

Exercice 12
Convergence et limite des suites suivantes :

1) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}$ **2)** $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 13
Limite et équivalent en $+\infty$ des suites suivantes :

1) $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)^n$ **2)** $u_n = e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ **3)** u_n vérifiant l'encadrement $n\pi \leqslant u_n \leqslant n\pi + \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 14 (Oral petites mines 2012)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1) Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement une racine dans $]0,1[$ et une racine dans $]1,+\infty[$. On les notera x_n et y_n respectivement.

2) Déterminer la limite et un équivalent de (x_n).

3) Déterminer la limite ℓ de (y_n), puis un équivalent de $y_n - \ell$.

Exercice 15
Soit (u_n), (v_n), (u'_n) et (v'_n) des suites de réels *strictement positifs*. Montrer que, si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$, alors $u_n + u'_n \sim v_n + v'_n$. Contre exemple dans le cas où les réels ne sont pas strictement positifs.