Exercices : Séries Numériques

Exercice 1 (cours)
Il faut connaître parfaitement la nature des séries de terme général u_n suivants :

1) $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ **2)** $u_n = q^n$ selon les valeurs de $q \in \mathbb{C}$.

Exercice 2
Déterminer la nature des séries de terme général u_n suivants.

1) $u_n = \dfrac{5^n+2}{11^n+3}$, **2)** $u_n = n^3 \sin(\dfrac{1}{2^n})$, **3)** $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$, **4)** $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$

5) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(\ln n)^{\ln n}}$, **6)** $u_n = e^{-\sqrt{n}}$, **7)** $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \neq 1$

8) $u_n = (-1)^n \sqrt{n} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, **9)** $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha + (-1)^n}$ avec $\alpha > 0$.

Exercice 3
Soit f, une fonction positive, décroissante et continue sur $[1, +\infty[$. On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad F(n) = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(t)dt$$

1) Montrer que la suite $(F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. En déduire que la suite $(F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

2) Application : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

En déduire un développement asymptotique de la série harmonique $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Remarque. La limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la constante d'Euler $\gamma \approx 0{,}57721566$.

Exercice 4 **1)** Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Montrer que si la série de terme général u_n est convergente et $u_n \geqslant 0$, alors la série de terme général u_n^2 est convergente.

2) Ce résultat demeure-t-il vrai si les réels u_n ne sont plus supposés positifs ? Indication : *On pourra rechercher un contre-exemple sous la forme d'une série alternée.*

3) On suppose que $u_n > -1$ et que les séries de terme général u_n et u_n^2 convergent. Étudier la série de terme général $\ln(1 + u_n)$.

Exercice 5
Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$$

est un réel négatif.