

Exercice 1 (Rayons de convergence)

1) Déterminer en fonction du paramètre $x \in \mathbb{R}$ la nature de chacune des séries de terme général u_n suivantes. On laissera de coté le comportement « au bord » des ensembles.

a) $u_n = x^n$ b) $u_n = nx^{n-1}$ c) $u_n = \frac{x^{2n}}{n^2 3^n}$ d) $u_n = \frac{x^n}{n!}$ e) $u_n = \frac{(-i)^n (n!)^n}{(2n+1)!} x^{4n+1}$

2) Mêmes questions pour $z \in \mathbb{C}$. On ne s'intéressera qu'à la convergence absolue.

Exercice 2 (Rayons de convergence)

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

1) $\sum (3n+1)z^{3n}$, 2) $\sum \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{n!} z^n, a > 0$ 3) $\sum \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} z^n$, 4) $\sum \frac{n^2}{3^n+n} z^n$,
 5) $\sum \frac{\text{ch}(n)}{n} z^n$, 6) $\sum \frac{\text{ch}(n)}{n} z^{2n}$, 7) $\sum n! z^n$ 8) $\sum \sin\left(\frac{1}{2^n}\right) z^n$

Exercice 3 (Rayons de convergence)

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

- 1) $\sum d_n z^n$, où d_n est la n -ième décimale de π .
- 2) $\sum c_n z^n$, où c_n est le nombre de chiffres de n en base 10.
- 3) $\sum \sin(n) z^n$. Indication : Montrer que $\sin n$ ne tends pas vers 0 par l'absurde, en utilisant $\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \sin 1 \cos n$ et $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Exercice 4 (Calculs de sommes)

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes, et exprimer leur somme sur l'intervalle $] -R, R[$ à l'aide de fonctions usuelles.

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} (2^n + 3^n) x^n$, 2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{4n}$, 3) $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1}$ 4) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$ 5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$,
 6) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(na)}{n! \sin^n a} x^n$, et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n! \sin^n a} x^n$, avec $a \notin \pi\mathbb{Z}$

Déterminer la somme sur l'intervalle $] -R, R[$, donc pour une variable x réelle, des séries correspondant au 5), 6) puis 1) de l'exercice 2, et 3) de l'exercice 3.

Exercice 5 (Développements en série entière)

Montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière au voisinage de 0, et calculer leur développement.

1) $\frac{\ln(1+x)}{x}$, 2) $\int_0^x e^{-t^2} dt$, 3) $\cos^2 x \sin x$, 4) $e^x \cos(x)$, 5) $\frac{1}{(1-t)^3}$.
 6) $f(x) = \cos \sqrt{x}$ pour $x \geq 0$ et $f(x) = \text{ch}(\sqrt{-x})$ pour $x < 0$. 7) $\frac{e^x}{1-x}$

Exercice 6 (Équation différentielle)

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$y' = xy + 1 \quad y(0) = 0$$

- 1) Soit $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière à coefficients réels, de rayon de convergence $R > 0$. On suppose que la fonction F est solution de l'équation différentielle sur $] -R, R[$. Déterminer a_0, a_1 ainsi qu'une relation de récurrence reliant, pour tout entier $n \geq 1$, a_{n+1} à a_{n-1} .

- 2) Pour tout entier naturel $p \geq 0$, en déduire la valeur de a_{2p} .
- 3) On admet que l'on peut montrer, de même, que pour tout $p \geq 0$, $a_{2p+1} \neq 0$. Déterminer R .
- 4) Exprimer, pour tout entier naturel $p \geq 0$, a_{2p+1} .

Exercice 7 (Équations différentielles)

Déterminer les solutions développables en série entière des équations différentielles suivantes. On exprimera explicitement les solutions obtenues à l'aide des fonctions usuelles.

- 1) $y' - x^2y = 0$, $y(0) = 1$;
- 2) $xy'' + 2y' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
- 3) $xy' - y = \frac{x^2}{1-x}$.

Exercice 8 (Équation différentielle pour déterminer un développement en série entière)

À l'aide d'une équation différentielle, déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes

- 1) $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$
- 2) $f(x) = (\text{Arcsin } x)^2$
- 3) $f(x) = (\ln(1+x))^2$

Exercice 9 (Série de fonctions)

Étude de la série entière $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

- 1) Déterminer le rayon de convergence de cette série.
- 2) Calculer la somme de la série dérivée, en déduire une expression de la somme f sur un intervalle à préciser.
- 3) Étudier la convergence de la série sur $[-1, 1]$, en déduire la valeur de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

Exercice 10 (Série de fonctions)

- 1) Calculer $u_n = \int_0^1 t^n (\ln t)^2 dt$.
- 2) Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt$ existe, puis que $I = 2 \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} dt$.
- 3) Montrer que $I = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Exercice 11 (Série de fonctions)

Le but de l'exercice est de montrer que $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n(4n+1)}$.

- 1) Développer $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ en série entière.
- 2) En déduire le développement de la primitive F de f s'annulant en 0, sur un intervalle que l'on précisera.
- 3) Méthode 1 : Montrer que la série de fonctions précédente, de limite F , converge uniformément sur $[-1, 1]$. Conclure.
- 4) Méthode 2 : Montrer que la série numérique $F(1)$ converge. Conclure en citant précisément les hypothèses du théorème utilisé.

Exercice 12

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{n-k+2}.$$

- 1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < a_n \leq 1$.

- 2) On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

- 3) a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$. Déterminer l'ensemble réel de

définition de la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

- b) On pose, lorsque cela est possible, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$, produit de Cauchy réel

des deux séries $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$.

Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} w_n x^n$ est supérieur ou égal à 1 et donner pour tout entier naturel n , une expression de w_n à l'aide de la suite (a_n) .

- c) En déduire que l'on a pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

- 4) Démontrer alors que pour tout $x \in [0, 1[$, $\ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

- 5) En déduire, pour tout $x \in [0, 1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

On utilisera sans le redémontrer que l'on a : $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.

- 6) Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 13 (Équation différentielle)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1} \binom{2n}{n}$.

- 1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1} = -2(2n-1)a_n$.

- 2) Donner le rayon de convergence R de la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, puis montrer que f est solution sur $] -R, R[$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on explicitera.

- 3) En déduire f .

Exercice 14 (supplémentaire)

Déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes :

1) $\ln \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)$

2) $\text{Arctan} \left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} \right)$

3) $\frac{2}{x^2 - 4x + 3}$

4) $\frac{1}{x^2 + x + 1}$

Exercice 15

Soit (a_n) une suite de nombres complexes tels que le rayon R de convergence de la série entière associée soit strictement positif. Quel est le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$$

Exercice 16 (Probabilités)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N} de loi

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X = 2n + 1) = \frac{1}{\text{ch } x} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

- 1) Calculer sa fonction génératrice à l'aide de fonctions usuelles.
- 2) En déduire son espérance et sa variance.

Exercice 17 (Probabilités)

On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité p de réussir et $q = 1 - p$ d'échouer définissant une suite de variables de Bernoulli indépendantes $(X_n)_{n \geq 1}$.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note S_m la variable aléatoire déterminant le nombre d'essais jusqu'à l'obtention de m succès :

$$S_m = k \Leftrightarrow X_1 + \dots + X_k = m \text{ et } X_1 + \dots + X_{k-1} < m$$

- 1) Rappeler le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ (on précisera le rayon).
En déduire, en explicitant (avec des « ... ») le coefficient du binôme, que

$$\forall t \in]-1, 1[\quad \frac{1}{(1-t)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+m-1}{m-1} t^n$$

- 2) Reconnaître la loi et donner la fonction génératrice de S_1 .
- 3) Déterminer la loi de S_m . En déduire sa fonction génératrice, puis son espérance.
- 4) À l'aide d'une somme de variables aléatoires discrètes de même loi, égales en loi à S_m , retrouver $E(S_m)$ et déterminer $V(S_m)$.

Exercice 18 (Exponentielle)

Nous allons montrer que l'exponentielle transforme la somme en produit : c'est un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans (\mathbb{C}^*, \times) .

- 1) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$$

- 2) Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$, rappeler quelle est la loi de $Z = X + Y$ (déjà calculé lors d'un exercice de probabilité).
À l'aide des fonctions génératrices, retrouvez le résultat de la question 1.

Exercice 19 (Inversion – CCP PSI 2018)

Soit $f(x) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_\alpha > 0$ telle que $f(0) = \alpha_0 = 1$.

L'objectif de cet exercice est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $g(x) = \sum_{k \geq 0} \beta_k x^k$ de rayon de convergence $R_\beta > 0$ telle que pour tout x appartenant aux domaines de convergence des deux séries :

$$f(x)g(x) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k \right) = 1.$$

- 1) Montrer que si $\sum_{k \geq 0} \beta_k x^k$ est solution, alors la suite $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ satisfait aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \beta_0 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} & = & 0. \end{cases} \quad (5)$$

Soit r un réel tel que $0 < r < R_\alpha$.

- 2) Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|\alpha_k| \leq \frac{M}{r^k}$$

- 3) Montrer que (5) admet une unique solution $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$|\beta_k| \leq \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}.$$

On pourra raisonner par récurrence et exprimer β_{n+1} en fonction des β_k pour $k \geq n$.

- 4) Que peut-on dire du rayon de convergence R_β de la série entière $\sum_{k \geq 0} \beta_k x^k$?
- 5) Désormais on suppose seulement $f(0) \neq 0$. Est-ce que $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ est développable en série entière ?