Exercices : Séries entières

Exercice 1 (Rayons de convergence)

1) Déterminer en fonction du paramètre $x \in \mathbb{R}$ la nature de chacune des séries de terme général u_n suivantes. On laissera de coté le comportement « au bord » des ensembles.

a) $u_n = x^n$ **b)** $u_n = nx^{n-1}$ **c)** $u_n = \dfrac{x^{2n}}{n^2 3^n}$ **d)** $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$ **e)** $u_n = \dfrac{(-i)^n (n!)^n}{(2n+1)!} x^{4n+1}$

2) Mêmes questions pour $z \in \mathbb{C}$. On ne s'intéressera qu'à la convergence absolue.

Exercice 2 (Rayons de convergence)
Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

1) $\sum (3n+1) z^{3n}$, **2)** $\sum \dfrac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{n!} z^n$, $a > 0$ **3)** $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1} z^n$, **4)** $\sum \dfrac{n^2}{3^n+n} z^n$,

5) $\sum \dfrac{\operatorname{ch}(n)}{n} z^n$, **6)** $\sum \dfrac{\operatorname{ch}(n)}{n} z^{2n}$, **7)** $\sum n! z^n$ **8)** $\sum \sin\left(\dfrac{1}{2^n}\right) z^n$

Exercice 3 (Rayons de convergence)
Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :

1) $\sum d_n z^n$, où d_n est la n-ième décimale de π.

2) $\sum c_n z^n$, où c_n est le nombre de chiffres de n en base 10.

3) $\sum \sin(n) z^n$. Indication : *Montrer que* $\sin n$ *ne tends pas vers* 0 *par l'absurde, en utilisant* $\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \sin 1 \cos n$ *et* $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Exercice 4 (Sommes)
Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes, et exprimer leur somme sur l'intervalle $]-R, R[$ à l'aide de fonctions usuelles.

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (2^n + 3^n) x^n$, **2)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{4n}$, **3)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1}$ **4)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$ **5)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$,

6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(na)}{n! \sin^n a} x^n$, et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n! \sin^n a} x^n$, avec $a \notin \pi\mathbb{Z}$

Déterminer la somme sur l'intervalle $]-R, R[$, donc pour une variable x réelle, des séries correspondant au **5), 6)** puis **1)** de l'exercice 2, et 3) de l'exercice 3.

Exercice 5 (Développements en série entière)
Montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière au voisinage de 0, et calculer leur développement.

1) $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, **2)** $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$, **3)** $\cos^2 x \sin x$, **4)** $e^x \cos(x)$, **5)** $\dfrac{1}{(1-t)^3}$.

6) $f(x) = \cos\sqrt{x}$ pour $x \geqslant 0$ et $f(x) = \operatorname{ch}(\sqrt{-x})$ pour $x < 0$. **7)** $\dfrac{e^x}{1-x}$

Exercice 6 (Équation différentielle)
On considère le problème de Cauchy suivant :

$$y' = xy + 1 \qquad y(0) = 0$$

1) Soit $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière à coefficients réels, de rayon de convergence $R > 0$. On suppose que la fonction F est solution de l'équation différentielle sur $]-R, R[$. Déterminer a_0, a_1 ainsi qu'une relation de récurrence reliant, pour tout entier $n \geqslant 1$, a_{n+1} à a_{n-1}.

2) Pour tout entier naturel $p \geqslant 0$, en déduire la valeur de a_{2p} .

3) On admet que l'on peut montrer, de même, que pour tout $p \geqslant 0$, $a_{2p+1} \neq 0$. Déterminer R.

4) Exprimer, pour tout entier naturel $p \geqslant 0$, a_{2p+1}.

Exercice 7 (Équations différentielles)
Déterminer les solutions développables en série entière des équations différentielles suivantes. On exprimera explicitement les solutions obtenues à l'aide des fonctions usuelles.

1) $y' - x^2 y = 0$, $y(0) = 1$; **2)** $xy'' + 2y' + xy = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$; **3)** $xy' - y = \dfrac{x^2}{1-x}$.

Exercice 8 (Équation différentielle pour déterminer un développement en série entière)
À l'aide d'une équation différentielle, déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes

1) $f(x) = \sin(\alpha \operatorname{Arcsin} x)$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ **2)** $f(x) = (\operatorname{Arcsin} x)^2$ **3)** $f(x) = (\ln(1+x))^2$

Exercice 9 (Série de fonctions)
Étude de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} x^{2n+1}$.

1) Déterminer le rayon de convergence de cette série.

2) Calculer la somme de la série dérivée, en déduire une expression de la somme f sur un intervalle à préciser.

3) Étudier la convergence de la série sur $[-1, 1]$, en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$.

Exercice 10 (Série de fonctions)

1) Calculer $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n (\ln t)^2 \, \mathrm{d}t$.

2) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$ existe, puis que $I = 2 \displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$.

3) Montrer que $I = 4 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Exercice 11 (Série de fonctions)
Le but de l'exercice est de montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n(4n+1)}$.

1) Développer $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$ en série entière.

2) En déduire le développement de la primitive F de f s'annulant en 0, sur un intervalle que l'on précisera.

3) Méthode 1 : Montrer que la série de fonctions précédente, de limite F, converge uniformément sur $[-1, 1]$. Conclure.

4) Méthode 2 : Montrer que la série numérique $F(1)$ converge. Conclure en citant précisément les hypothèses du théorème utilisé.

Exercice 12
On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}.$$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leqslant 1$.

2) On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$. Justifier que son rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

Pour $x \in]-1,1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

3) **a)** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n+2}$. Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

b) On pose, lorsque cela est possible, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n x^n$, produit de Cauchy réel des deux série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n+2}$.

Justifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} w_n x^n$ est supérieur ou égal à 1 et donner pour tout entier naturel n, une expression de w_n à l'aide de la suite (a_n).

c) En déduire que l'on a pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x) = f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

4) Démontrer alors que pour tout $x \in [0,1[$, $\ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

5) En déduire, pour tout $x \in [0,1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
On utilisera sans le redémontrer que l'on a : $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$.

6) Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 13 (Équation différentielle)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}\binom{2n}{n}$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1} = -2(2n-1)a_n$.

2) Donner le rayon de convergence R de la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, puis montrer que f est solution sur $]-R,R[$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on explicitera.

3) En déduire f.

Exercice 14 (supplémentaire)

Déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes :

1) $\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ **2)** $\text{Arctan}\left(\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}\right)$ **3)** $\frac{2}{x^2-4x+3}$ **4)** $\frac{1}{x^2+x+1}$

Exercice 15

Soit (a_n) une suite de nombres complexes tels que le rayon R de convergence de la série entière associée soit strictement positif. Quel est le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} z^n$$

Exercice 16 (Probabilités)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(X = 2n+1) = \frac{1}{\text{ch } x} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

1) Calculer sa fonction génératrice à l'aide de fonctions usuelles.

2) En déduire son espérance et sa variance.

Exercice 17 (Probabilités)
On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité p de réussir et $q = 1 - p$ d'échouer définissant une suite de variables de Bernoulli indépendantes $(X_n)_{n\geqslant 1}$.
Pour $m \in \mathbb{N}^\star$, on note S_m la variable aléatoire déterminant le nombre d'essais jusqu'à l'obtention de m succès :

$$S_m = k \Leftrightarrow X_1 + \cdots + X_k = m \text{ et } X_1 + \cdots + X_{k-1} < m$$

1) Rappeler le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ (on précisera le rayon).
En déduire, en explicitant (avec des « ... ») le coefficient du binôme, que

$$\forall t \in]-1,1[\qquad \frac{1}{(1-t)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+m-1}{m-1} t^n$$

2) Reconnaître la loi et donner la fonction génératrice de S_1.

3) Déterminer la loi de S_m. En déduire sa fonction génératrice, puis son espérance.

4) À l'aide d'une somme de variables aléatoires discrètes de même loi, égales en loi à S_m, retrouver $E(S_m)$ et déterminer $V(S_m)$.

Exercice 18 (Inversion – CCP PSI 2018)
Soit $f(x) = \sum_{k\geqslant 0} \alpha_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_\alpha > 0$ telle que $f(0) = \alpha_0 = 1$.
L'objectif de cet exercice est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $g(x) = \sum_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$ de rayon de convergence $R_\beta > 0$ telle que pour tout x appartenant aux domaines de convergence des deux séries :

$$f(x)g(x) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k\right) = 1.$$

1) Montrer que si $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$ est solution, alors la suite $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ satisfait aux relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \beta_0 & = & 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} & = & 0. \end{array}\right. \tag{5}$$

Soit r un réel tel que $0 < r < R_\alpha$.

2) Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|\alpha_k| \leqslant \frac{M}{r^k}$$

3) Montrer que (5) admet une unique solution $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$|\beta_k| \leqslant \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}.$$

On pourra raisonner par récurrence et exprimer β_{n+1} en fonction des β_k pour $k \geqslant n$.

4) Que peut-on dire du rayon de convergence R_β de la série entière $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k x^k$?

5) Désormais on suppose seulement $f(0) \neq 0$. Est-ce que $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$ est développable en série entière ?