Exercices : Probabilités

Exercice 1 (Probabilités usuelles sur $\mathbb{N}$)
Soit $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la tribu $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$.

1) Soit $p \in]0,1[$. Posons $\begin{cases} P(\{0\}) &= 0 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(\{k\}) &= p(1-p)^{k-1} \end{cases}$, puis pour $A \in \mathscr{A}$ $P(A) = \sum_{k \in A} P(\{k\})$.

a) Montrer que P définit une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$.

b) Soit A l'évènement « $n \geqslant 10$ ». Calculer $P(A)$.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\forall k \in \mathbb{N},\ P(\{k\}) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ étendu à $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ comme ci-dessus.
Montrer que P définit une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$.

Exercice 2

1) Soit $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la tribu $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\mathbb{N})$.
Soit P une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} P(\{n\}) = 0$$

2) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements deux à deux incompatibles d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
Montrer

$$\lim_{n \to +\infty} P(A_n) = 0$$

Exercice 3

1) Soit $\Omega = [\![1,6]\!]^{\mathbb{N}}$ représentant un nombre dénombrable de lancers de dé indépendants. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, considérons l'événement :

A_n : « Le n-ième lancer est un 4. »

Exprimer à l'aide de phrase puis à l'aide de quantificateurs les événements suivants :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n = \bigcup_{m \geqslant n} A_m = \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m \qquad \text{et} \qquad B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

2) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad B_n = \bigcup_{m \geqslant n} A_m$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \in \mathscr{A}$, puis que

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \to +\infty} P(B_n)$$

3) (Borel-Cantelli) On suppose de plus que $\sum_{n \geqslant 0} P(A_n)$ converge. Montrer que $P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = 0$.

Exercice 4
Soit A et B deux évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1) Montrer que, si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.

2) Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont.

Exercice 5

1) Considérons une famille ayant exactement deux enfants. Notons f les filles et g les garçons. Il y a 4 possibilités, en notant le plus âgée en premier :

$$ff, fg, gf, gg$$

On suppose qu'il y a équiprobabilité.

a) On suppose que l'un des enfants est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?

b) Soit A : « La famille a au plus un garçon » et B : « Il y a des enfants des deux sexes ».
Les événements A et B sont-ils indépendants ?

c) L'aînée est une fille (événement A') , quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ? A' et B sont-ils indépendants ?

2) Désormais la famille a exactement 3 enfants. Comparer les événements A_3 et B_3.

Exercice 6
L'urne U, au contenu évolutif, contient au départ 1 boule blanche et $n-1$ boules noires ($n \geqslant 2$). On effectue des tirages successifs de la façon suivante :

- si au k-ième tirage on tire la boule blanche, on s'arrête, on a gagné ;
- si au k-ième tirage on tire une boule noire, alors on remet la boule noire dans l'urne, on ajoute une boule noire en plus dans l'urne U et on procède au $(k+1)$-ième tirage.

On note B_k [resp. N_k] les événements « on a effectué $(k-1)$ tirages sans obtenir la boule blanche, et le k-ième tirage apporte la boule blanche [resp. une boule noire] ». Après les avoir décrits, calculer les probabilités des événements suivants :

$$N_k \quad ; \quad B_k \quad ; \quad \bigcup_{h \leqslant k} B_h \quad ; \quad \overline{B_k \cup N_k} \quad ; \quad \bigcup_{h \geqslant 1} N_h \quad ; \quad \bigcup_{h \geqslant 1} B_h \quad ; \quad \bigcap_{h \geqslant 1} N_h.$$

Exercice 7
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements mutuellement indépendants.
Montrer que la probabilité qu'aucun des A_n ne soit réalisé est inférieure à

$$\exp\left(-\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)\right)$$

Indication : *Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x \leqslant e^x$.*

Exercice 8 (Loi hypergéométrique)

1) On considère une urne contenant n boules, b blanches et $n-b$ noires. On tire p boules, sans remise. Soit X le nombre de boules blanches tirées. Donner la loi de X.

2) Application à l'estimation de la taille d'une population : des poissons dans un lac. On suppose que 1000 poissons sont capturés, marqués, puis relâchés. Une seconde pêche capture 1000 nouveaux poissons, dont 100 marqués. On suppose qu'entre les deux pêches le nombre de poisson n'a pas bougé, et qu'ils se sont parfaitement mélangés.

a) Quelle est la probabilité de l'événement « la seconde pêche comporte 100 poissons marqués », en appelant n le nombre de poissons au total dans le lac.

b) Quelle est cette probabilité si $n = 2000$?

Exercice 9
Une maladie rare touche un individu sur 100 000. On dispose d'un test de dépistage qui est positif pour 95% des personnes malades et pour 0.5% des individus sains. Un individu est testé positif. Quelle est la probabilité qu'il soit effectivement malade ? Ce test vous paraît-il fiable ? Et si le test est négatif, que doit-on en penser ?

Exercice 10
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

1) Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$, donner la loi de $Z = X + Y$.
2) Si $X \sim \mathscr{G}(p)$ et $Y \sim \mathscr{G}(p)$, avec $p \in]0, 1[$, donner la loi de $Z = X + Y$.
3) Si $X \sim \mathscr{G}(p)$ et $Y \sim \mathscr{G}(q)$, avec p, $q \in]0, 1[$, donner la loi de $Z = \min(X, Y)$.

Exercice 11
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N}, \qquad P\left(X = j, Y = k\right) = \frac{a}{j!k!}$$

où $a \in \mathbb{R}$ tel que P soit une loi de probabilité.

1) Déterminer la valeur de a.
2) Reconnaître les lois marginales de X et Y.
3) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 12
Deux joueurs A et B s'affrontent à un jeu de dé (supposé parfaitement équilibré). A commence la partie et lance le dé. S'il obtient 1 ou 2, A est déclaré vainqueur et la partie s'arrête. Sinon, B prend la main et jette le dé : s'il obtient 3, 4 ou 5, il a gagné et la partie s'arrête. Sinon, A prend la main et on recommence dans les mêmes conditions ...
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le résultat du n-ième lancer, A_{2n-1} l'évènement « A gagne au $(2n-1)$-ième lancer » et B_{2n} l'évènement « B gagne au $2n$-ième lancer ».

1) Soit n entier naturel non nul. Exprimer A_{2n-1} et B_{2n} à l'aide des $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, puis calculer leur probabilité.
2) Quelles sont les probabilités des évènements G_A :« A gagne », G_B :« B gagne » et H :« la partie ne s'arrête pas ».

Exercice 13 (Marche aléatoire)
Une puce se déplace sur la droite réelle. Au départ (à $t = 0$), elle est à l'origine $x = 0$. A chaque étape, on jette une pièce équilibrée, si le résultat est Pile, la puce se déplace de 1 vers la gauche (donc de -1), si le résultat est Face, elle se déplace de 1 vers la droite. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons X_n la position de la puce à la n-ième étape.

1) Donner la loi de la variable aléatoire Y_n représentant le déplacement lors de la n-ième étape.
2) Exprimer X_n en fonction des $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.
3) Quelle est la probabilité d'être de retour à l'origine 0 à la $2n$-ième étape ?

Exercice 14 (Urnes de Polya – cas particulier)
Une urne contient au départ 1 boule noire et 1 boule blanche. On effectue une suite de tirages qui consiste à tirer une boule de l'urne, regarder sa couleur, et la remettre dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur avant le tirage suivant. On cherche à déterminer l'évolution de la proportion de boules noires dans l'urne.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de boules noires à l'issue du n-ième tirage. On a en particulier $X_0 = 1$.

1) Quel est le nombre de boules à la n-ième étape ?
2) Déterminer les lois de X_1 et X_2.
3) Déterminer par récurrence la loi de X_n.
4) On note A_n l'évènement « tirer une boule noire lors du n-ième tirage » : à l'aide de la loi des $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$, déterminer la probabilité de l'évènement A_n.

Exercice 15
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

Exercice 16

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

Modélise une succession de lancers de pile ou face, avec probabilité p d'obtenir pile.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $U_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.

Dans la modélisation précédente, Y_n est un succès si les lancers n et $n+1$ donnent pile. U_n est le nombre de succès de Y_n entre 1 et n.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de Y_n puis calculer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

2) Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n < m$. Les variables Y_n et Y_m sont-elles mutuellement indépendantes ? Calculer $\operatorname{Cov}(Y_n, Y_m)$.

3) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(U_n)$ et $V(U_n)$.

Exercice 17

Soit X une variable aléatoire discrète suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$P\Big(X < \frac{\lambda}{2}\Big) \leqslant \frac{4}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad P(X > 2\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}$$

Exercice 18

Une usine confectionne des pièces dont une proportion p est défectueuse. On effectue un prélèvement de n pièces et on note Z_n la variable aléatoire discrète représentant le nombre de pièces défectueuses dans ce prélèvement. On veut approcher p par la proportion $\dfrac{Z_n}{n}$ de pièces défectueuses sur cet échantillon.

Remarque : dans ce problème on suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande. Par conséquent, le prélèvement peut être considéré comme une suite de n tirages indépendants avec remise.

1) Quelle est la loi de Z_n ?

2) En déduire sa moyenne et sa variance.

3) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\dfrac{Z_n}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.

4) En déduire une condition sur n pour que l'approximation donne une valeur approchée de p à 0.01 près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.