# Exercices : Matrices

**Exercice 1**

Calculer le rang, le noyau et l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

**Exercice 2**
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ ayant pour matrice, dans la base canonique,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer le noyau, le rang et l'image de $f$. Construire $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base du noyau, complétée en une base de l'image puis en une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice $M'$ de $f$ dans cette base, et la matrice de passage.

**Exercice 3** (exemple de décomposition $LU$)
On considère les matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

**1)** Calculer l'inverse de $L$.

**2)** Déterminer une matrice $U$ triangulaire supérieure telle que $A = LU$. En déduire $A^{-1}$.

La décomposition $LU$ permet de calculer rapidement l'inverse d'une matrice $A$, dans le but par exemple de résoudre un système du type $Ax = b$.

**Exercice 4**
Soit $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées symétriques de taille $n$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrée antisymétriques (${}^tM = -M$) de taille $n$.

**1)** Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On précisera leur dimension.

**2)** Montrer que

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$

**Exercice 5**
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ fixés. Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = -M + \mathrm{Tr}\,(M)A$.

**1)** Montrer que $f$ est un endomorphisme.

**2)** On suppose que $\mathrm{Tr}\,(A) \neq 1$, montrer que $f$ est bijective.

**3)** On suppose désormais que $\mathrm{Tr}\,(A) = 1$, déterminer $\mathrm{Ker}\ f$. Montrer que $\mathrm{Im}\ f = \{M \mid \mathrm{Tr}\ M = 0\}$.

**4)** Résoudre $f(X) = B$.

**Exercice 6**
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $u_A$ défini par $u_A(M) = MA$ pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

**1)** Montrer que $u_A$ est un endomorphisme. Noyau et image de $u_A$.

**2)** Déterminer la matrice de $u_A$ dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

**3)** Écrire la matrice de $u_A : M \mapsto MA$ lorsque $A$ est une matrice quelconque de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

**4)** Dans le cas où $A$ est quelconque, montrer que $u_A$ laisse stable $\mathrm{Vect}\,(E_{1,1}, E_{1,2})$ et $\mathrm{Vect}\,(E_{2,1}, E_{2,2})$.

**Exercice 7** (difficile) **1)** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $i$, $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que $A$ est inversible.

**2)** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $i$, $\sum_j |a_{i,j}| < 1$. Montrer que l'équation $X = AX + B$, où $B \in \mathbb{C}^n$ est fixé, admet une solution unique.

**3)** Soit $P$ une matrice stochastique — c'est-à-dire une matrice réelle à coefficients positifs vérifiant $\forall i \ \sum_j p_{i,j} = 1$. Montrer que $\sup\{\lambda \mid (P - \lambda I_n) \text{ n'est pas inversible}\} = 1$ et que ce sup est atteint. Montrer que les puissances d'une matrice stochastique sont stochastiques.