

Exercice 1 (Oral, classique)

Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ on pose $g(x, t) = e^{-t^2} \cos(xt)$

- 1) Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} g(x, t) dt$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et qu'elle est paire.
- 2) Montrer que f est continue.
- 3) Montrer que f est \mathcal{C}^1 et exprimer $f'(x)$ à l'aide d'un intégrale généralisée.
- 4) Montrer que f est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.
- 5) En admettant que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, trouver une expression de f sans intégrale.

Exercice 2 (CCP PC 2017)

Pour $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ on pose $g(x, t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ et $f(x) = \int_0^1 g(x, t) dt$. De plus, soit $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

- 1) a) Montrer que f est définie sur \mathbb{R}_+ . Déterminer la limite de f en $+\infty$.
 b) Soit $a > 0$. Montrer que f est \mathcal{C}^1 sur $[0, a]$ et calculer sa dérivée.
 En déduire que f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .
- 2) Montrer que h est définie et \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .
- 3) Vérifier que $f + h^2$ est une fonction constante sur \mathbb{R}_+ , que l'on déterminera.
- 4) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 3 (Fonction Gamma)

Soit $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

- 1) a) Montrer que la fonction Γ est définie sur \mathbb{R}_+^* et que

$$\Gamma(1) = 1.$$

- b) Montrer que

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

- c) En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, et un équivalent de Γ en 0.

- 2) Montrer que Γ est continue sur son domaine de définition.
- 3) Montrer que Γ est de classe \mathcal{C}^∞ sur son domaine de définition, et exprimer sa dérivée à l'aide d'un intégrale. En déduire que Γ est convexe.

(La fonction Gamma vérifie bien des relations et des formules, que nous ne détaillons pas dans cet exercice).

Exercice 4 (Produit de convolution)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable sur \mathbb{R} , et soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. On pose

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt.$$

- 1) Montrer que la formule précédente définit une fonction $f * g$ continue et bornée sur \mathbb{R} .
- 2) Montrer que $f * g = g * f$ (on justifiera soigneusement).
- 3) On suppose de plus que g est de classe \mathcal{C}^1 et que la fonction g' est bornée. Montrer que $f * g$ est de classe \mathcal{C}^1 et $(f * g)' = f * g'$.

Exercice 5 (Transformée de Fourier d'une fonction intégrable)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable sur \mathbb{R} Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on pose

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi} dx.$$

- 1) Montrer que la fonction \widehat{f} est définie, continue et bornée sur \mathbb{R} .
- 2) On suppose de plus que f est de classe \mathcal{C}^1 , et que f' est intégrable sur \mathbb{R} . Montrer que f est de limite nulle en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f}'(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi)$.
- 3) On suppose que f est de classe \mathcal{C}^n , à support compact (c'est-à-dire nulle hors d'un segment $[a, b]$). Déterminer $\widehat{f^{(n)}}(\xi)$ en fonction de ξ et de $\widehat{f}(\xi)$ (remarque : on dérive f puis on prend la transformée de Fourier).
- 4) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et intégrable sur \mathbb{R} et supposons que la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$ soit aussi intégrable. Montrer que \widehat{f} est de classe \mathcal{C}^1 , et montrer que $\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi) = -i\widehat{g}(\xi)$.
- 5) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto x^n f(x)$ soit intégrable sur \mathbb{R} . Montrer que \widehat{f} est de classe \mathcal{C}^∞ et déterminer $\frac{d^n}{d\xi^n}\widehat{f}$ en fonction de \widehat{g}_n .
- 6) Montrer que si f est paire et à valeurs réelles, alors il en est de même de \widehat{f} .
- 7) (5/2) Pour $\sigma > 0$, on pose $f_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$. On admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.
 - a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!}$.
 - b) À l'aide de la décomposition en série entière du cosinus, montrer que la transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-x^2}$ est $\xi \mapsto \sqrt{\pi}e^{-\xi^2}$.
 - c) On pose $\sigma' = \frac{1}{\sigma}$. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\widehat{f_\sigma} = \mu f_{\sigma'}$. Relire l'exercice 1.

Exercice 6 (Ecricome ECS 2009)

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par la formule suivante :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t} \sqrt{1+x^2 e^{2t}} dt$$

- 1) Domaine de définition, parité et valeur en $x = 0$ de f .
- 2) Branche infinie de \mathcal{C}_f :
 - a) Montrer que $\forall (x, t) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}_+ \quad xe^t \leq \sqrt{1+x^2 e^{2t}} \leq xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}$
 - b) En déduire que $\forall x > 0, x \leq f(x) \leq x + \frac{1}{6x}$ puis la nature de la branche infinie de \mathcal{C}_f au voisinage de $+\infty$.
- 3) Montrer que f est continue puis \mathcal{C}^1 sur son domaine de définition. Donner son tableau de variations.
- 4)
 - a) Soit $x > 0$. En effectuant le changement de variable $u = xe^t$, déterminer une nouvelle expression de f . Faire de même pour f' .
 - b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.
 - c) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\int_x^{+\infty} \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} du$ et que la fonction $u \mapsto \frac{u \ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
 - d) En déduire un équivalent de f' puis de $f - \frac{1}{2}$ au voisinage de 0.

Exercice 7

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right) dt$.

- 1) Montrer que la fonction $F : x \mapsto F(x)$ est continue sur \mathbb{R} . Parité. Réduction du domaine d'étude.
- 2) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et déterminer sa dérivée.
- 3) Montrer que F est solution d'une équation différentielle sur \mathbb{R}_+^* .

4) En déduire un développement de F en série entière et une expression de F à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 8

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$

- 1) Justifier l'existence et calculer $\int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt$
- 2) Justifier que F est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Calculer $F'(x)$.
- 3) En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

Exercice 9 (*)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad f(t) = \ln(1 + e^{-tx}) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \ln(1 + e^{-nx}) = f(n)$$

On note $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$ que l'on ne cherchera pas à calculer.

- 1) Montrer que l'intégrale I converge.
- 2) Étudier la convergence de la série de terme général u_n .
- 3) Déterminer les variations de f . En déduire un encadrement de la série des u_n à l'aide d'intégrales de f .
- 4) On note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Déduire de la question précédente $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$ et un équivalent de S en 0^+ .