Exercices : Intégrales à paramètre

Exercice 1 (Oral, classique)
Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ on pose $g(x,t) = e^{-t^2}\cos(xt)$

1) Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et qu'elle est paire.

2) Montrer que f est continue.

3) Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ et exprimer $f'(x)$ à l'aide d'un intégrale généralisée.

4) Montrer que f est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.

5) En admettant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, trouver une expression de f sans intégrale.

Exercice 2 (CCP PC 2017)
Pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$ on pose $g(x,t) = \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^1 g(x,t)\,\mathrm{d}t$. De plus, soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) **a)** Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Soit $a > 0$. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,a]$ et calculer sa dérivée.
En déduire que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrer que h est définie et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

3) Vérifier que $f + h^2$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+$, que l'on déterminera.

4) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 (Transformée de Laplace – E3A PC 2010)
Dans tout cet exercice, E désignera l'ensemble constitué par toutes les fonctions f, définies et continues sur $[0,+\infty[$, à valeurs réelles et vérifiant la propriété suivante :
il existe un réel $A > 0$, un réel $C > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que $\quad \forall t \geqslant A, \quad |f(t)| \leqslant Ct^n$

1) Pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout réel $x > 0$, on considère l'intégrale généralisée $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}\,\mathrm{d}t$

a) Vérifier que pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $I_0(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est convergente et que

$$I_0(x) = \frac{1}{x}$$

b) En effectuant une démonstration par récurrence, montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout réel $x > 0$, l'intégrale $I_n(x)$ est convergente et que $I_n(x) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$

2) On se donne $f \in E$.

a) Soit x un réel strictement positif ; montrer que la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
On notera alors jusqu'à la fin du problème

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

b) Énoncer le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

c) On fixe un réel $x_0 > 0$. Montrer que l'application $x \mapsto \mathcal{L}(f)(x)$ est continue sur l'intervalle $[x_0,+\infty[$. En déduire que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

3) On se donne $f \in E$. On considère des réels $A > 0$, $C > 0$ et un entier n tels que $|f(t)| \leqslant Ct^n$ pour tout réel $t \geqslant A$.

a) Montrer que
$$|\mathcal{L}(f)(x)| \leqslant \int_0^A |f(t)e^{-xt}|\,\mathrm{d}t + C\frac{n!}{x^{n+1}}$$
pour tout réel $x > 0$.

b) Montrer que
$$\int_0^A |f(t)e^{-xt}|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

c) En déduire que $\mathcal{L}(f)(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 4 (Fonction Gamma)
Soit $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1) **a)** Montrer que la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que
$$\Gamma(1) = 1.$$

b) Montrer que
$$\forall x > 0, \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

c) En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, et un équivalent de Γ en 0.

2) Montrer que Γ est continue sur son domaine de définition.

3) Montrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition, et exprimer sa dérivée à l'aide d'un intégrale. En déduire que Γ est convexe.

(La fonction Gamma vérifie bien des relations et des formules, que nous ne détaillons pas dans cet exercice).

Exercice 5 (Produit de convolution)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. On pose
$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que la formule précédente définit une fonction $f * g$ continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $f * g = g * f$.

3) On suppose de plus que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et que la fonction g' est bornée. Montrer que $f * g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $(f * g)' = f * g'$.

Exercice 6 (Transformée de Fourier d'une fonction intégrable)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on pose
$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x.$$

1) Montrer que la fonction $\widehat{f}$ est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

2) On suppose de plus que f est de classe $\mathscr{C}^1$, et que f' est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est de limite nulle en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f'}(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi)$.

3) On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^n$, à support compact (c'est-à-dire nulle hors d'un segment $[a, b]$). Déterminer $\widehat{f^{(n)}}(\xi)$ en fonction de ξ et de $\widehat{f}(\xi)$ (remarque : on dérive f *puis* on prend la transformée de Fourier).

4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ et supposons que la fonction g définie par $g(x) = xf(x)$ soit aussi intégrable. Montrer que $\widehat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, et montrer que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\widehat{f}(\xi) = -i\widehat{g}(\xi)$.

5) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto x^n f(x)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\widehat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et déterminer $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n}\widehat{f}$ en fonction de $\widehat{g_n}$.

6) Montrer que si f est paire et à valeurs réelles, alors il en est de même de $\widehat{f}$.

7) (5/2) Pour $\sigma > 0$, on pose $f_\sigma(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)$. On admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!}$.

b) À l'aide de la décomposition en série entière du cosinus, montrer que la transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-x^2}$ est $\xi \mapsto \sqrt{\pi}e^{-\xi^2}$.

c) On pose $\sigma' = \dfrac{1}{\sigma}$. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\widehat{f_\sigma} = \mu f_{\sigma'}$. Relire l'exercice 1.

Exercice 7 (Ecricome ECS 2009)
Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par la formule suivante :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1 + x^2e^{2t}}\,\mathrm{d}t$$

1) Domaine de définition, parité et valeur en $x = 0$ de f.

2) Branche infinie de $\mathscr{C}_f$:

a) Montrer que $\quad \forall (x,t) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}_+ \quad xe^t \leqslant \sqrt{1 + x^2e^{2t}} \leqslant xe^t + \dfrac{e^{-t}}{2x}$

b) En déduire que $\forall x > 0$, $x \leqslant f(x) \leqslant x + \dfrac{1}{6x}$ puis la nature de la branche infinie de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

3) Montrer que f est continue puis $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition. Donner son tableau de variations.

4) **a)** Soit $x > 0$. En effectuant le changement de variable $u = xe^t$, déterminer une nouvelle expression de f. Faire de même pour f'.

b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.

c) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ et que la fonction $u \mapsto \dfrac{u\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

d) En déduire un équivalent de f' puis de $f - \dfrac{1}{2}$ au voisinage de 0.

Exercice 8
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que la fonction $F : x \mapsto F(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Parité. Réduction du domaine d'étude.

2) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée.

3) Montrer que F est solution d'une équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) En déduire un développement de F en série entière et une expression de F à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 9
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\,\mathrm{d}t$

1) Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$

2) Justifier que F est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(x)$.

3) En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

Exercice 10 (*)
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad f(t) = \ln\left(1 + e^{-tx}\right) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \ln\left(1 + e^{-nx}\right) = f(n)$$

On note $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u$ que l'on ne cherchera pas à calculer.

1) Montrer que l'intégrale I converge.

2) Étudier la convergence de la série de terme général u_n.

3) Déterminer les variations de f. En déduire un encadrement de la série des u_n à l'aide d'intégrales de f.

4) On note $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Déduire de la question précédente $\lim_{x \to +\infty} S(x)$ et un équivalent de S en 0^+.