Exercices : Intégrales à paramètre

Exercice 1 (Oral, classique)
Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ on pose $g(x,t) = e^{-t^2}\cos(xt)$

1) Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et qu'elle est paire.

2) Montrer que f est continue.

3) Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ et exprimer $f'(x)$ à l'aide d'un intégrale généralisée.

4) Montrer que f est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.

5) En admettant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, trouver une expression de f sans intégrale.

Exercice 2 (CCP PC 2017)
Pour $(x,t) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$ on pose $g(x,t) = \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^1 g(x,t)\,\mathrm{d}t$. De plus, soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) **a)** Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Soit $a > 0$. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,a]$ et calculer sa dérivée.
En déduire que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrer que h est définie et $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

3) Vérifier que $f + h^2$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+$, que l'on déterminera.

4) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 (Fonction Gamma)
Soit $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1) **a)** Montrer que la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\Gamma(1) = 1$.

b) Montrer que
$$\forall x > 0, \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

c) En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Montrer que Γ est continue sur son domaine de définition. En déduire un équivalent de Γ en 0.

3) Montrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition, et exprimer sa dérivée à l'aide d'un intégrale. En déduire que Γ est convexe.

La fonction Gamma vérifie bien des relations et des formules, que nous ne détaillons pas dans cet exercice. Par exemple : pour tout $x > 0$, $\Gamma(x)\zeta(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4 (Produit de convolution)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. On pose
$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que la formule précédente définit une fonction $f * g$ continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $f * g = g * f$. Ce produit est aussi associatif, mais les intégrales multiples ne sont pas au programme.

3) On suppose de plus que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et que la fonction g' est bornée. Montrer que $f * g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $(f * g)' = f * g'$.

4) Supposons que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ existe. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f * g(x)$.

Le produit de convolution est « la bonne notion de produit » sur l'espace des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, et même sur des espaces de fonctions plus généraux. Vous avez déjà croisé la convolution, cette année, en informatique...

Exercice 5 (Transformée de Fourier d'une fonction intégrable)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on pose

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x.$$

1) Montrer que la fonction $\widehat{f}$ est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

2) On suppose de plus que f est de classe $\mathscr{C}^1$, et que f' est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est de limite nulle en $+\infty$ et en $-\infty$. Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{f'}(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi)$.

3) On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^n$, à support compact (c'est-à-dire nulle hors d'un segment $[a, b]$). Déterminer $\widehat{f^{(n)}}(\xi)$ en fonction de ξ et de $\widehat{f}(\xi)$.

4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n : x \mapsto x^n f(x)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\widehat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et déterminer $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n}\widehat{f}$ en fonction de $\widehat{g_n}$.

5) Montrer que si f est paire et à valeurs réelles, alors il en est de même de $\widehat{f}$.

6) Pour $\sigma > 0$, on pose $f_\sigma(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)$. On admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}(2p)!}{2^{2p}p!}$.

b) (5/2) À l'aide de la décomposition en série entière du cosinus, montrer que la transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-x^2}$ est $\xi \mapsto \sqrt{\pi}e^{-\xi^2}$.

c) On pose $\sigma' = \dfrac{1}{\sigma}$. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\widehat{f_\sigma} = \mu f_{\sigma'}$. Relire l'exercice 1.
Vous venez de montrer que la gaussienne est un vecteur propre de la transormée de Fourier.

Exercice 6 (Ecricome ECS 2009)
Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par la formule suivante :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1 + x^2e^{2t}}\,\mathrm{d}t$$

1) Domaine de définition, parité et valeur en $x = 0$ de f.

2) Branche infinie de $\mathscr{C}_f$:

a) Montrer que $\quad \forall (x, t) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}_+ \quad xe^t \leqslant \sqrt{1 + x^2e^{2t}} \leqslant xe^t + \dfrac{e^{-t}}{2x}$

b) En déduire que $\forall x > 0$, $x \leqslant f(x) \leqslant x + \dfrac{1}{6x}$ puis la nature de la branche infinie de $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

3) Montrer que f est continue puis $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition. Donner son tableau de variations.

4) **a)** Soit $x > 0$. En effectuant le changement de variable $u = xe^t$, déterminer une nouvelle expression de f. Faire de même pour f'.

b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.

c) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{1 + u^2}} = -\frac{\ln x}{\sqrt{1 + x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u \ln u}{(1 + u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ et que la fonction $u \mapsto \dfrac{u \ln u}{(1 + u^2)^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

d) En déduire un équivalent de f' puis de $f - \dfrac{1}{2}$ au voisinage de 0.

Exercice 7

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(t^2 + \frac{x^2}{t^2}\right)\right) \mathrm{d}t$.

1) Montrer que la fonction $F : x \mapsto F(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Parité. Réduction du domaine d'étude.

2) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée.

3) Montrer que F est solution d'une équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) (5/2) En déduire un développement de F en série entière et une expression de F à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 8 (*)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad f(t) = \ln\left(1 + e^{-tx}\right) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \ln\left(1 + e^{-nx}\right) = f(n)$$

On note $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u$ que l'on ne cherchera pas à calculer.

1) Montrer que l'intégrale I converge.

2) Étudier la convergence de la série de terme général u_n.

3) Déterminer les variations de f. En déduire un encadrement de la série des u_n à l'aide d'intégrales de f.

4) On note $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Déduire de la question précédente $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} S(x)$ et un équivalent de S en 0^+.