

Exercice 1 (Normes)

Soit $E = \mathbb{K}^n$. On note

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

- 1) Montrer que ce sont des normes.
- 2) Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$\text{a) } \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \quad \text{b) } \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty \quad \text{c) } \|x\|_\infty \leq \|x\|_1$$

Exercice 2 (Normes)

Définir des normes 1, 2 et ∞ sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 3 (Espace de fonctions)

Soit $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, avec $a < b$ deux réels.

- 1) Construire des normes 1 et ∞ . Rappeler une norme 2 sur E .
- 2) Montrer que ce sont des normes. Sur le modèle de l'exercice 1, donner des relations entre elles.

Exercice 4 (Matrices)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A = (a_{i,j}) \in E$, on pose

$$\|A\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

- 1) Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- 2) Vérifier

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Exercice 5 (Espace de fonctions)

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $f_n \in E$ définie par $f_n(x) = \sqrt{n}x^n$.

Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour $\|\cdot\|_1$ et diverge pour $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 6 (Quelques résultats généraux)

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

- 1) Soit F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que $\mathring{F} \neq \emptyset \implies F = E$.
- 2) Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte non vide est la boule fermée de même rayon ; et que l'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte de même rayon.
- 3) Soit F un sous-espace vectoriel de E , et $x \in E$. Montrer que la distance $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$ existe et est atteinte.

Exercice 7 (Convexité)

Parmi les ensembles suivants, préciser, en justifiant, lesquels sont convexes.

- 1) Les sphères de rayon $r > 0$ dans un espace vectoriel normé E de dimension finie.
- 2) $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \geq 0\}$ dans \mathbb{R}^2 .
- 3) L'ensemble des matrices bistochastiques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a_{ij} \geq 0; \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1; \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$$

Exercice 8 (Matrices)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $(A^k)_k$ converge vers M . Montrer que M est la matrice d'un projecteur.

Exercice 9 (Ouverts, fermés)

Parmi les ensembles suivants, préciser, en justifiant, lesquels sont des ouverts et lesquels sont des fermés. E est un espace vectoriel normé de dimension finie.

- | | |
|---|--|
| 1) $\{x \in E \mid \ x - a\ \geq 2\}$ | 2) $\{x \in E \mid \ x - a\ > 5/3\}$ |
| 3) F sous-espace vectoriel de E , | 4) $]0, 1[, [0, 1[, [0, 1]$ et $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} |
| 5) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 5z^2 = 1\}$ | 6) $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$ et $\mathbb{R}^2 - (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ dans \mathbb{R}^2 . |

Précisez lesquels sont bornés.

Exercice 10 (Ouverts, fermés : matrices)

Dans cet exercice, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$.

- 1) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 2) Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 3) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 11 (Ouverts, fermés — CCP PC 2015 Exo 2)

Soit $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 2 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \right\}$.

- 1) Trouver une condition nécessaire et suffisante simple sur x et y pour que (x, y) appartienne à E .
- 2) Montrer que E est une partie ouverte de \mathbb{R}^2 .

Exercice 12 (Continuité)

On définit la fonction $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leq y \\ y(1-x) & \text{si } y < x \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$ (Indication : Chercher une expression de f sans « si »).
- 2) Montrer que f admet un maximum et un minimum sur $[0, 1] \times [0, 1]$, les déterminer.

Exercice 13 (Suites)

Soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie et $f : E \rightarrow E$ une application k -lipschitzienne.

- 1) Montrer que f admet au plus un point fixe si $k < 1$.
- 2) On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in E$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que f admet un point fixe $\ell \in E$.
 - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(u_n - \ell) \leq k^n N(u_0 - \ell)$.
 - b) Si $k < 1$, que peut-on dire de la suite (u_n) ?

Exercice 14 (Continuité)

La fonction suivante est-elle continue sur \mathbb{R}^2 : $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{2x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 15 (Continuité)

Étudier les limites (et un éventuel prolongement par continuité) en $(0, 0)$ des applications définies pour $(x, y) \neq (0, 0)$ de la façon suivante :

$$f : (x, y) \mapsto \frac{(x^2 + xy + y^2)^2}{x^2 + y^2} \quad g : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^4 + y^4} \quad \text{et} \quad h : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Exercice 16

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- 1) Montrer que $\{x \in E \mid \|x\| = 1\}$ est un fermé borné de E .
- 2) Montrer qu'il existe x_0 vecteur unitaire tel que $\|u(x_0)\| = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.