Exercices : Espaces vectoriels normés

Exercice 1 (Normes)
Soit $E = \mathbb{K}^n$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Notons

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \qquad \|x\|_\infty = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$$

1) Montrer que ce sont des normes.

2) Montrer que, pour tout $x \in E$,

a) $\|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2$ **b)** $\|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty$ **c)** $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1$

Exercice 2 (Normes)
Définir des normes 1, 2 et ∞ sur $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 3 (Normes : Espace de fonctions)
Soit $E = \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, avec $a < b$ deux réels.

1) Construire des normes 1 et ∞. Rappeler une norme 2 sur E.

2) Montrer que ce sont des normes. Sur le modèle de l'exercice 1, donner des relations entre elles.

Exercice 4 (Matrices)
Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A = (a_{i,j}) \in E$, on pose $\|A\| = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

1) Montrer que $\|.\|$ définit une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2) Vérifier

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$$

Exercice 5 (Espace de fonctions, suite de l'exercice 3)
Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $f_n \in E$ définie par $f_n(x) = \sqrt{n}x^n$.
Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour $\|.\|_1$ et diverge pour $\|.\|_\infty$.Ces normes sont-elles équivalentes ?

Exercice 6
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Le but de cet exercice est de construire une norme N telle que $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$, tende vers $P \in E$ arbitraire.

1) Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in E$. On pose $N(P) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{|a_n|}{n+1}$.
Montrer que N est bien définie et est une norme sur E. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} X^n$ pour N.

2) Avec les notations précédentes, on pose $N(P) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n+1)|a_n|$. Mêmes questions.

3) Soit $P \in E$ fixé non nul et $d = \deg P$. Montrer que $(1, X, \ldots, X^d, X^{d+1} - P, \ldots, X^n - P, \ldots)$ est une base de E. En déduire une norme $\|.\|$ telle que la suite $(X^n)_n$ converge vers P pour cette norme.

Exercice 7 (Espace de fonctions)
Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de $\|.\|_\infty$.

1) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, posons $\varphi_x : f \mapsto f(x)$ définie sur E. Montrer que φ_x est 1-Lipschitzienne.
Est-ce que $F = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant 0\}$ est fermé ?

2) Montrer que $G = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > 0\}$ n'est pas ouvert. Indication : *Revenir à la définition.*

3) Soit $\varphi \in E$. On pose, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\varphi = \|\varphi f\|_\infty$. Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur φ pour que $\|.\|_\varphi$ soit une norme, puis une norme équivalente à $\|.\|_\infty$.

Exercice 8 (Densité)
Soit $E = \ell^1(\mathbb{R}) = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_n| \text{ converge}\}$, muni de $\|.\|_1$.
Soit F l'ensemble des suites à support fini : $u = (u_n) \in F \iff \exists n \in \mathbb{N}, \forall k > n, u_k = 0$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2) Montrer que F est dense dans E.

Exercice 9 (Quelques résultats généraux)
Soit E muni de $\|.\|$ un espace vectoriel normé.

1) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\mathring{F} \neq \emptyset \Longrightarrow F = E$.

2) Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte non vide est la boule fermée de même rayon ; et que l'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte de même rayon.

Exercice 10 (Convexité)
Parmi les ensembles suivants, préciser, en justifiant, lesquels sont convexes.

1) Les sphères de rayon $r > 0$ dans un espace vectoriel normé E de dimension finie.

2) $T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leqslant 1\right\}$ dans $\mathbb{R}^2$.

3) L'ensemble des matrices bistochastiques dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire les $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad a_{ij} \geqslant 0; \qquad \forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1; \qquad \forall j \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$$

4) Soit A une partie convexe de $(E, \|.\|)$ espace vectoriel normé. Montrer que $\bar{A}$ et $\mathring{A}$ sont convexes.
Indication : *Pour $\bar{A}$, utiliser la caractérisation séquentielle. Pour $\mathring{A}$, faire un dessin avec $r = \min(r_a, r_b)$.*

Exercice 11 (Matrices)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $(A^k)_k$ converge vers M. Montrer que M est la matrice d'un projecteur.

Exercice 12 (Ouverts, fermés)
Parmi les ensembles suivants, préciser, en justifiant, lesquels sont des ouverts et lesquels sont des fermés. $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie.

1) $\{x \in E \mid \|x - a\| \geqslant 2\}$

2) $\{x \in E \mid \|x - a\| > 5/3\}$

3) F sous-espace vectoriel de E,

4) $]0,1[$, $[0,1[$, $[0,1]$ et $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$

5) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 5z^2 = 1\}$

6) $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$ et $\mathbb{R}^2 - (\mathbb{R}_- \times \{0\})$ dans $\mathbb{R}^2$.

Précisez lesquels sont bornés.

Exercice 13 (Ouverts, fermés : matrices)
Dans cet exercice, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est muni d'une norme $\|.\|$.

1) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$) est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 14 (Ouverts, fermés — CCP PC 2015 Exo 2)
Soit $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 2 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable dans } \mathscr{M}_2(\mathbb{R})\right\}$.

1) Trouver une condition nécessaire et suffisante simple sur x et y pour que (x,y) appartienne à E.

2) Montrer que E est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 15 (Continuité)
On définit la fonction

$$f : \begin{array}{ccl} [0,1] \times [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leqslant y \\ y(1-x) & \text{si } y < x \end{cases} \end{array}$$

1) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, exprimer $\max(x,y) + \min(x,y)$ et $\max(x,y) - \min(x,y)$ en fonction de x et y. En déduire que max et min sont des fonctions continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f est continue sur $[0,1] \times [0,1]$

3) Montrer que f admet un maximum et un minimum sur $[0,1] \times [0,1]$, les déterminer.

Exercice 16 (Suites)
Soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie et $f : E \to E$ une application k-lipschitzienne.

1) Montrer que f admet au plus un point fixe si $k < 1$.

2) On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in E$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que f admet un point fixe $\ell \in E$.

 a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(u_n - \ell) \leq k^n N(u_0 - \ell)$.

 b) Si $k < 1$, que peut-on dire de la suite (u_n) ?

3) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\|.\|$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $X \to AX$ soit k-lipschitzienne avec $k < 1$. Soit $B \in \mathbb{R}^n$. Résoudre $X = AX + B$ à l'aide d'une suite $(X_n)_n$.

Exercice 17 (Continuité)
La fonction suivante est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$: $f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{2x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 18 (Continuité)
Étudier les limites en $(0,0)$ des applications définies pour $(x,y) \neq (0,0)$ de la façon suivante :

$$f : (x,y) \mapsto \frac{(x^2+xy+y^2)^2}{x^2+y^2} \qquad g : (x,y) \mapsto \frac{xy}{x^4+y^4} \qquad \text{et} \qquad h : (x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Exercice 19 (Fermés bornés)
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie

1) Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il existe x_0 vecteur unitaire tel que $\|u(x_0)\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|$.

2) Soit F un sous-espace vectoriel de E, et $x \in E$.
Montrer que la distance $d(x,F) = \inf\limits_{y\in F} \|x-y\|$ existe et est atteinte.
Application : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $n \in \mathbb{N}$.
Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\|f - Q\|_\infty = \inf\limits_{P\in\mathbb{R}_n[X]} \|P - f\|_\infty$.

3) Soit K fermé borné de E. $f : K \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\forall x \in \mathbb{K},\ f(x) > 0$.
Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{K},\ f(x) \geqslant \alpha$.