

1 Exercices d'application directe du cours

Exercice 1

Montrer que les applications $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes sont des produits scalaires sur E .

1) $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$.

Commencer par vérifier que $\varphi(P, Q)$ existe.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ des réels 2 à 2 distincts.

$E = \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $(P, Q) \in E^2$, $\varphi(P, Q) = \sum_{i=0}^n P(a_i)Q(a_i)$.

Proposer une base orthonormée, et une application linéaire de E dans \mathbb{R}^{n+1} canonique qui conserve la norme.

3) $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $(A, B) \in E$, $\varphi(A, B) = \text{Tr}({}^tAB)$. Expliciter ce produit scalaire en fonction des coefficients de A et B .

Exercice 2

Soit E un espace préhilbertien, dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire.

Soit $(y_1, y_2) \in E^2$ tels que $\forall x \in E \langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle$. Montrer que $y_1 = y_2$.

Remarque : cette propriété est importante, en particulier lorsque $y_2 = 0$. Il faut savoir l'écrire en termes matriciels.

Exercice 3

Montrer que pour $0 < a < b$, on a $\int_a^b \frac{dx}{x} \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$. Indication : Cauchy-Schwarz.

(bonus : peut-on avoir égalité?)

Exercice 4 (Schmidt)

Orthonormaliser par Schmidt les bases suivantes de \mathbb{R}^3 : $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ et $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$

2 Espaces, sous-espaces, orthogonalité, projections

Exercice 5

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de $(A|B) = \text{Tr}({}^tAB)$ pour tout $(A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

1) Montrer que $(A|B) = \text{Tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur E en explicitant ce produit scalaire en fonction des coefficients de A et B . En déduire une base orthonormée.

2) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \right| \leq n \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$

3) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (les matrices symétriques) et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (les matrices antisymétriques) sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

4) Soit $\varphi : E \rightarrow E$ définie par $\varphi(M) = M^T$. Montrer que, pour tout $M \in E$, $\|\varphi(M)\| = \|M\|$.

Exercice 6 (Un espace de fonctions)

Soit I un intervalle fixé de \mathbb{R} . Soit E l'ensemble des fonction continues sur I à valeurs dans \mathbb{R} telles que f^2 soit intégrable sur I .

1) Montrer que E est un espace vectoriel. Indication : $(a-b)^2 \geq 0$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

2) On admet que $\langle f, g \rangle = \int_I fg$ est un produit scalaire. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{1+t^2}} dt \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 7 (orthogonal d'un sous-espace vectoriel, projection)

Soit $E = \mathbb{R}^2$ euclidien canonique, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique; et $F = \text{Vect}((1, 2))$. (faire un dessin)

1) Donner l'équation de F^\perp , puis une base de F^\perp . En déduire une base orthonormée $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ de $E = F \oplus F^\perp$ compatible avec la somme directe.

- 2) Soit p_F la projection orthogonale sur F . Donner la matrice M' de p_F dans \mathcal{B}' .
 Pour tout $x \in E$ donner l'expression de $p_F(x)$ en fonction de x et e'_1 .
 En déduire la matrice M de p_F dans \mathcal{B} . Donner une formule liant M et M' .
- 3) Distance $d((1, 1), F)$.

Exercice 8

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (A|B) = \text{Tr}({}^t AB)$$

(c'est le même espace qu'à l'exercice 5). Soit $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$.

- 1) Déterminez la dimension de F^\perp , puis une base orthonormée de F^\perp .
- 2) En déduire une expression de $p_F(M)$, la projection orthogonale d'une matrice $M \in E$ sur F .
- 3) Donner $d(J, F)$, où J est la matrice de taille n dont tous les coefficients valent 1.

Exercice 9 (Un espace de suites)

On considère l'espace préhilbertien $\ell^2(\mathbb{R})$ des suites réelles de carré sommable (i.e. la série $\sum |u_n|^2$ converge), muni de son produit scalaire canonique

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

Sur le modèle de la question 1 de l'exercice 6, on montre que $\ell^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
 On note F l'ensemble des suites réelles à support fini, c'est-à-dire nulles à partir d'un certain rang (ce rang dépendant de la suite considérée).

- 1) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
- 2) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{R})$, différent de $\ell^2(\mathbb{R})$.
- 3) Montrer que $F^\perp = \{0\}$
- 4) En déduire que $F^{\perp\perp} \neq F$

Exercice 10 (Projecteurs orthogonaux)

Soit E un espace préhilbertien, et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

- 1) Rappeler la définition d'un projecteur orthogonal.
- 2) Pour tout $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, développer $\|\lambda x + y\|^2$.
- 3) Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E \ \|p(x)\| \leq \|x\|$.

Indication : Penser à la preuve de Cauchy-Schwarz.

Exercice 11 (Une famille de polynômes : Polynômes de Laguerre)

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$, produit scalaire sur E d'après l'exercice 1.

- 1) Calculer $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire $(X^i|X^j)$ pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.
- 2) Application : minimiser une intégrale.
 - a) Orthonormaliser la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
 - b) En déduire la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.
 - c) Calculer $\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 e^{-t} dt$. On commencera par écrire le problème algébriquement.
- 3) Soit (P_0, P_1, \dots) une base orthonormée de E de degré échelonné¹.
 - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_{n+1} est orthogonal à $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Ici $\deg P_n = n$: par exemple la base obtenue par orthonormalisation de Schmidt à partir de la base canonique

b) Montrer que toutes les racines de P_n sont réelles et dans $]0, +\infty[$.

Indication : Si on note $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq m}$ les racines de P_n dans $]0, +\infty[$ comptées avec multiplicité, et

$$Q = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i), \text{ on pourra regarder } (Q|P_n).$$

Bonus : prouver que ces racines sont simples.

Plus généralement, si I est un intervalle de \mathbb{R} et $W : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, positive, non identiquement nulle, telle que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ la fonction $t \mapsto P(t)W(t)$ est intégrable sur I , alors on peut définir le produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_I P(t)Q(t)W(t) dt$ sur E .

En orthonormalisant la base canonique, on obtient une famille de polynômes orthogonaux. Par exemple les polynômes de Legendre ($I = [-1, 1]$, $W(x) = 1$, CCINP 2018), de Tchebychev ($I =]-1, 1[$, $W(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$), de Hermite ($I = \mathbb{R}$, $W(x) = e^{-x^2}$ CCINP 2016), de Laguerre (étudiés ici, $I = \mathbb{R}_+$, $W(x) = e^{-x}$, ex1, CCINP 2019), etc...

Exercice 12 (Orthogonalité; CCP 2013)

Soient F et G deux sous-espaces d'un espace euclidien E . Montrer que

$$F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp \quad (F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \quad (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$$

Exercice 13

Soit E un espace préhilbertien, dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire.

Soit f, g deux fonctions de E dans E telles que $\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x, f(y) \rangle = \langle g(x), y \rangle$.

Montrer que f et g sont linéaires.

3 Isométries

Exercice 14

Soit E un espace euclidien, et $f \in \mathcal{O}(E)$.

- 1) Montrer que $\text{Ker}(f - \text{id}_E) = \text{Im}(f - \text{id}_E)^\perp$.
- 2) En déduire que si $(f - \text{id}_E)^2 = 0$, alors $f = \text{id}_E$.

Exercice 15 (OT 2012 Petites Mines)

Soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall i, j \quad |a_{ij}| \leq 1$ et $\left| \sum_{ij} a_{ij} \right| \leq n$.

Indication : Pour la première inégalité, revenir à la définition d'une matrice orthogonale.

Pour la seconde, remarquer que $\langle x, y \rangle = X^T Y$ dans une base orthonormée, puis appliquez Cauchy-Schwarz.

Exercice 16 (CCP 2013)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $M^T = M^2$. Montrer que M est orthogonale.

Exercice 17 (De la matrice à l'endomorphisme)

Soit $E = \mathbb{R}^3$ euclidien canonique, et $u : E \rightarrow E$ où $M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{6} & 1 \\ \sqrt{6} & 2 & -\sqrt{6} \\ 1 & \sqrt{6} & 3 \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que u est une isométrie.
- 2) Rappeler les valeurs propres réelles possibles. Déterminer les éventuels sous-espaces propres.
- 3) Donner la matrice de u dans une base \mathcal{B}' mieux adaptée.
- 4) Décrire u : si c'est une rotation, déterminer l'axe et l'angle.
- 5) Calculer M^{2021} .

4 Endomorphismes autoadjoints

Exercice 18 (suite du 11)

Montrer que $f(P) = XP'' + (1 - X)P'$ est un endomorphisme autoadjoint de E .

cf. CCINP 2019 pour une réduction détaillée.

Exercice 19

Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E . Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un endomorphisme autoadjoint.

Exercice 20

Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^p = I_n$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer M^2 .

Exercice 21

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique à valeurs propres positives. On pose $B = A^2 + A + I_n$. Montrer que A est un polynôme en B .

Exercice 22

Soit E un espace euclidien de dimension au moins 2, $a \in E$ unitaire, et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in E$ on pose $f(x) = x + \alpha \langle x, a \rangle a$.

- 1) Vérifier que f est un endomorphisme autoadjoint de E .
- 2) Éléments propres :
 - a) Montrer que a est un vecteur propre de f .
 - b) Montrer que 1 est une valeur propre de f . Quel est le sous-espace propre associé ?
 - c) Donner une matrice de f dans une base de vecteurs propres.
- 3) Que représente l'endomorphisme $x \mapsto \langle x, a \rangle a$ de E ?
- 4) Pour quelles valeurs de α f est-il une isométrie ? Caractériser dans ce cas cet endomorphisme.
- 5) Soit a et b deux réels, et $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$. Condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que M soit une matrice orthogonale. Décrire l'endomorphisme associé.

Exercice 23

Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables puis les diagonaliser à l'aide d'une matrice orthogonale positive :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 24

On considère un espace euclidien E . Soit f un endomorphisme symétrique de E . On note λ la plus petite valeur propre de f et μ la plus grande valeur propre de f . Montrer que pour tout $x \in E$,

$$\lambda \|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \mu \|x\|^2.$$

Exercice 25 (Matrices symétriques positives)

- 1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S = A^T A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
- 2) Réciproquement : soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^T A$. Dans quel cas A est-elle inversible ?

Exercice 26 (Matrices symétriques positives : coefficients)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

- 1) Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{ii} \geq 0$.
- 2) Si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ est tel que $a_{ii} = 0$, montrer que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{ij} = 0$.

3) Soit $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{Tr}(AB) \geq 0$.

Exercice 27

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ un endomorphisme autoadjoint d'un espace vectoriel E euclidien.

- 1) a) Si u est positif, montrer qu'il existe $v \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $v^2 = u$.
b) Montrer que ce v est unique.
- 2) Soit $p \in \mathbb{N}$ impair. Montrer qu'il existe un unique $v \in \mathcal{S}(E)$ tel que $v^p = u$.

Exercice 28

Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons Φ_A l'application :

$$\Phi_A : (X, Y) \in E^2 \mapsto X^T A Y \in \mathbb{R}$$

- 1) Montrer que Φ_A est bilinéaire.
- 2) Montrer que Φ_A est symétrique si et seulement si A est une matrice symétrique.
- 3) Montrer que Φ_A est un produit scalaire si et seulement si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- 4) Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer que, pour tout $i \neq j$, $a_{ij}^2 < a_{ii}a_{jj}$.
- 5) Si A est symétrique réelle, justifier qu'elle est diagonalisable dans une base orthonormée \mathcal{B}' . Écrire $\Phi_A(X, Y)$ en fonction des coordonnées de X et Y dans \mathcal{B}' .

5 Autres applications remarquables

Exercice 29

Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .

Le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et la norme $\|\cdot\|$.

- 1) Soit X et Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y de E dans la base \mathcal{B} . Rappeler l'expression de $\langle x, y \rangle$ à l'aide de X et Y .
- 2) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, de matrice A dans la base \mathcal{B} . On note f^* l'endomorphisme dont la matrice dans la base \mathcal{B} est A^T .
 - a) Vérifier que l'on a $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.
 - b) Établir que f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.
- 3) On suppose désormais que $f \in \mathcal{L}(E)$ possède au moins une valeur propre λ réelle, et on se propose de démontrer qu'il existe un hyperplan E stable par f .
 - a) Montrer que λ est valeur propre de f^* .
 - b) On considère un vecteur propre u de f^* associé à la valeur propre λ . Montrer que $(\text{Vect } u)^\perp$ est un hyperplan de E et qu'il est stable par f .