Exercices : Euclidiens

Exercice 1
Montrer que les applications $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ suivantes sont des produits scalaires sur E.

1) $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout $(P,Q) \in E^2$, $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
Commencer par vérifier que $\varphi(P,Q)$ existe.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ des réels 2 à 2 distincts.
$E = \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $(P,Q) \in E^2$, $\varphi(P,Q) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(a_i)Q(a_i)$.
Proposer une base orthonormée, et une application linéaire de E dans $\mathbb{R}^{n+1}$ canonique qui conserve la norme.

3) $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $(A,B) \in E$, $\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}\left({}^tAB\right)$. Expliciter ce produit scalaire en fonction des coefficients de A et B.

Exercice 2
Soit E un espace préhilbertien, dont on note $\langle \cdot,\cdot \rangle$ le produit scalaire.
Soit $(y_1,y_2) \in E^2$ tels que $\forall x \in E\ \langle x,y_1\rangle = \langle x,y_2\rangle$. Montrer que $y_1 = y_2$.
Remarque : cette propriété est importante, en particulier lorsque $y_2 = 0$. Il faut savoir l'écrire en termes matriciels.

Exercice 3
Montrer que pour $0 < a < b$, on a $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$. Indication : *Cauchy-Schwarz.*
(bonus : peut-on avoir égalité ?)

Exercice 4
Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de $(A|B) = \mathrm{Tr}\left({}^tAB\right)$ pour tout $(A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Déduire de l'écriture de $(A|B)$ une base orthonormée.

2) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\displaystyle\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leqslant n\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$

3) Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (les matrices symétriques) et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ (les matrices antisymétriques) sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

4) Soit $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi(M) = M^T$. Montrer que, pour tout $M \in E$, $\|\varphi(M)\| = \|M\|$.

Exercice 5
Soit I un intervalle fixé de $\mathbb{R}$. Soit E l'ensemble des fonction continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que f^2 soit intégrable sur I.

1) Montrer que E est un espace vectoriel, puis que $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_I fg$ est un produit scalaire.

2) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 6 (Schmidt)
Orthonormaliser par Schmidt les bases suivantes de $\mathbb{R}^3$: $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ et $((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$

Exercice 7 (orthogonal d'un sous-espace vectoriel, projection)
Soit $E = \mathbb{R}^2$ euclidien canonique, $\mathscr{B} = (e_1,e_2)$ la base canonique ; et $F = \mathrm{Vect}\left((1,2)\right)$. (faire un dessin)

1) Donner l'équation de $F^\perp$, puis une base de $F^\perp$. En déduire une base orthonormée $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2)$ de $E = F \oplus F^\perp$ compatible avec la somme directe.

2) Soit p_F la projection orthogonale sur F. Donner la matrice de p_F dans $\mathscr{B}'$, puis dans $\mathscr{B}$.
Pour tout $x \in E$ donner l'expression de $p_F(x)$ en fonction de x et e'_1 ,sans passer par les matrices que l'on vient d'obtenir.

3) Distance $\mathrm{d}((1,1),F)$.

Exercice 8
Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \qquad (A|B) = \operatorname{Tr}({}^t AB)$$

(c'est le même espace qu'à l'exercice 4). Soit $F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \operatorname{Tr}(M) = 0\}$.

1) Déterminez la dimension de $F^\perp$, puis une base orthonormée de $F^\perp$.

2) En déduire une expression de $p_F(M)$, la projection orthogonale d'une matrice $M \in E$ sur F.

3) Donner $d(J, F)$, où J est la matrice de taille n dont tous les coefficients valent 1.

Exercice 9 (Projecteurs)
Soit E un espace préhilbertien, et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur.
Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
Indication : *Penser à la preuve de Cauchy-Schwarz.*

Exercice 10 (Polynômes de Legendre)
Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]^2$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur E. Orthonormaliser la base $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) En déduire la projection de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

3) Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (t^3 - at^2 - bt - c)^2\,\mathrm{d}t$. On commencera par écrire le problème algébriquement.

4) Soit $(P_0, P_1, \dots)$ une base orthonormée de E de degré échelonné [1].

- **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_{n+1} est orthogonal à $\mathbb{R}_n[X]$.
- **b)** Montrer que toutes les racines de P_n sont réelles et dans $]-1, 1[$.

  Indication : *Si on note $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ les racines de P_n comptées avec multiplicité, et $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)$, on pourra regarder $(Q|P_n)$.*
  Bonus : prouver que ces racines sont simples.

Plus généralement, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $W : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, positive, non identiquement nulle, telle que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ la fonction $t \mapsto P(t)W(t)$ est intégrable sur I, alors on peut définir le produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_I P(t)Q(t)W(t)\,\mathrm{d}t$ sur E.
En orthonormalisant la base canonique, on obtient une famille de polynômes orthogonaux. Par exemple les polynômes de Legendre (étudiés ici, $I = [-1, 1]$, $W(x) = 1$), de Tchebychev ($I =]-1, 1[$, $W(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$), de Hermite ($I = \mathbb{R}$, $W(x) = e^{-x^2}$), de Laguerre ($I = \mathbb{R}_+$, $W(x) = e^{-x}$, produit scalaire à l'exercice 1), etc...

Exercice 11
Soit E un espace préhilbertien, dont on note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire.
Soit f, g deux fonctions de E dans E telles que $\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x, f(y)\rangle = \langle g(x), y\rangle$.
Montrer que f et g sont linéaires.

Exercice 12 (CCP 2013)
Soient F et G deux sous-espaces d'un espace euclidien E. Montrer que

$$F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp \qquad (F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \qquad (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$$

Exercice 13
Soit E un espace euclidien, et $f \in \mathscr{O}(E)$.

1) Montrer que $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}_E) = \operatorname{Im}(f - \mathrm{id}_E)^\perp$.

2) En déduire que si $(f - \mathrm{id}_E)^2 = 0$, alors $f = \mathrm{id}_E$.

1. i.e. $\deg P_n = n$: par exemple la base obtenue par orthonormalisation de Schmidt à partir de la base canonique

Exercice 14
Soit a un vecteur de $E = \mathbb{R}^3$ et λ un réel. On considère l'application φ de E dans E définie par

$$\forall u \in E \qquad \varphi(u) = u + \lambda\langle u, a\rangle a$$

1) Vérifier que φ est un endomorphisme.

2) Pour quelle(s) valeur(s) de λ l'application φ est-elle une isométrie ?

3) Que représente l'endomorphisme $u \mapsto \langle u, a\rangle a$ de E ?

4) Reconnaître alors φ.

Exercice 15 (OT 2012 Petites Mines)

Soit $M = (a_{ij}) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\forall i, j \quad |a_{ij}| \leqslant 1$ et $\left|\sum_{ij} a_{ij}\right| \leqslant n$.

Indication : *Pour la première inégalité, revenir à la définition d'un endomorphisme orthogonal. Pour la seconde, remarquer que $\langle x, y\rangle = {}^tXY$ dans une base orthonormée.*

Exercice 16 (CCP 2013)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que ${}^tA = A^2$. Montrer que A est orthogonale.

Exercice 17 (De la matrice à l'endomorphisme)

Soit $E = \mathbb{R}^3$ euclidien canonique, et $u : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ X & \mapsto & MX \end{array}$ où $M = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que u est une isométrie.

2) Rappeler quelles sont les valeurs propres possibles. Déterminer les éventuels sous-espaces propres.

3) Donner la matrice de u dans une base $\mathscr{B}'$ mieux adaptée.

4) Décrire u : si c'est une rotation, déterminer l'axe et l'angle.

5) Calculer M^{2019}.

Exercice 18
Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et notons pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, Φ_A l'application :

$$\Phi_A : (X, Y) \in E^2 \mapsto {}^tXAY \in \mathbb{R}$$

1) Montrer que Φ_A est bilinéaire.

2) Montrer que Φ_A est symétrique si et seulement si A est une matrice symétrique.

3) Montrer que si A est non inversible, Φ_A n'est pas un produit scalaire (même si A est symétrique).
Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, est-ce que Φ_A est un produit scalaire ?

4) Montrer que si Φ_A est un produit scalaire, toute valeur propre réelle de A est strictement positive.

5) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, est-ce que Φ_A est un produit scalaire ?

6) Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, exprimer $\Phi_A(X, Y)$ en fonction des coefficients de X et Y.

7) Montrer que Φ_A est un produit scalaire si et seulement si A est symétrique avec $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 19
Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si p est un endomorphisme symétrique.

Exercice 20 (suite du 10)
Montrer que $f(P) = 2XP' + (X^2 - 1)P'' = ((X^2 - 1)P')'$ est un endomorphisme symétrique de E.

Exercice 21
Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables plus les diagonaliser à l'aide d'une matrice orthogonale positive :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 22
Soit E un espace euclidien, $a \in E$ unitaire, et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in E$ on pose $f(x) = x + \alpha\langle x, a\rangle a$.

1) Vérifier que f est un endomorphisme symétrique de E.

2) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel stable par f, alors $F^\perp$ est également stable par f.

3) Montrer que a est un vecteur propre de f.

4) Montrer que 1 est une valeur propre de f. Quel est le sous-espace propre associé ?

5) Pour quelles valeurs de α f est-il une isométrie ? Caractériser dans ce cas cet endomorphisme. L'exercice 14 est le cas particulier pour $E = \mathbb{R}^3$.

Exercice 23

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S = {}^tAA$ est une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont positives. <u>Indication</u> : *Regarder* $\|AX\|^2$ *où* X *est un vecteur propre de* S.

2) Réciproquement : soit $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont positives. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$. Dans quel cas A est-elle inversible ?

3) On considère un espace euclidien E. Soit f un endomorphisme symétrique de E. On note λ la plus petite valeur propre de f et μ la plus grande valeur propre de f. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$\lambda\|x\|^2 \leq \langle f(x), x\rangle \leq \mu\|x\|^2.$$

Exercice 24 (BCE 2013 S)
Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Le produit scalaire est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et la norme $\|.\|$.

1) Soit X et Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y de E dans la base $\mathscr{B}$. Rappeler l'expression de $\langle x, y\rangle$ à l'aide de X et Y.

2) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, de matrice A dans la base $\mathscr{B}$. On note f^* l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est ${}^tA$.

- **a)** Vérifier que l'on a $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$.
- **b)** Établir que f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$.

3) On suppose désormais que $f \in \mathscr{L}(E)$ possède au moins une valeur propre λ réelle, et on se propose de démontrer qu'il existe un hyperplan E stable par f.

- **a)** Montrer que λ est valeur propre de f^*.
- **b)** On considère un vecteur propre u de f^* associé à la valeur propre λ. Montrer que $(\text{Vect } u)^\perp$ est un hyperplan de E et qu'il est stable par f.