Exercices : Équations Différentielles

Exercice 1 (Linéaire d'ordre 1, raccords)
On considère l'équation différentielle
$$ty' + (t-1)y = t^2 \tag{1}$$

1) Déterminer l'ensemble des solutions sur chacun des intervalles où Cauchy-Lipschitz s'applique.

2) Déterminer les solutions $\mathscr{C}^1$ de (1) sur $\mathbb{R}$.

3) Tracer quelques courbes intégrales. Que remarque-t-on en $t = 0$? Combien a-t-on de solution satisfaisant $y(0) = 0$?

4) Déterminer les solutions de classe $\mathscr{C}^1$ et solutions développables en série entière de $ty' + (t-2)y = 0$.

Exercice 2
Même démarche pour résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $ty' - \dfrac{y}{2} = t^2 \ln|t|$ **2)** $t(t-1)y' + 2y = 3t$

Exercice 3 **1)** Résoudre l'équation différentielle $t(t^2+1)y' - (t^2-1)y = -2t$. Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}$?
Montrer qu'il existe un point $A(t, y)$ tel que toutes les tangentes aux courbes intégrales au point d'abscisse 2 soient concourante en A. On pourra tracer des courbes intégrales.

2) Résoudre l'équation différentielle $ty' + (1-t)y = \dfrac{te^t}{t^4+1}$ Tracer des courbes intégrales. Existe-t-il des solutions sur $\mathbb{R}^*$ prolongeable par continuité à $\mathbb{R}$?

Exercice 4 (Linéaires d'ordre 2, changement de variable)
Résoudre, à l'aide des changements de variable proposés, les équations différentielles suivantes :

1) $4ty'' + 2y' - y = 0$ et $t = x^2$ **2)** $(1-t^2)y'' - ty' + y = 0$ et $t = \cos x$
3) $(1+t^2)^2 y'' + 2t(1+t^2)y' + my = 0$ où $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 (Linéaires d'ordre 2, cas où l'on connaît une solution de l'équation homogène)
Résoudre, en cherchant une solution particulière de l'équation homogène (changement de fonction y), les équations différentielles suivantes :

1) $t^2y'' + 4ty' + 2y = \ln(1+t)$, solution particulière de la forme $t \mapsto t^\alpha$.

2) $ty'' + 2y' - ty = 0$, solution particulière développable en série entière.

3) $t^2y'' + t(t+1)y' - y = 0$, solution particulière développable en série entière.

Exercice 6
Résoudre l'équation différentielle $2t(1-t)y'' + (3-5t)y' - y = 0$ en la mettant sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g(t)y' + h(t)y) = 0$.

Exercice 7 (Linéaire d'ordre 2 à coefficients constants : révisions de sup)
Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'' + 2y' + y = te^t$ **2)** $y'' + 4y' + y = \cos(t)e^{-t}$ **3)** $y'' + y' + y = t^2 + e^t$
4) $y'' - 6y' + 9y = e^{3t} + \sin t$ **5)** $y'' + y = \tan^2(t)$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Exercice 8 (Systèmes : révisions d'algèbre linéaire)
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

2) Résoudre le système différentiel $\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & x(t) + 3y(t) \\ y'(t) & = & 2x(t) + 2y(t) \end{array} \right.$

Exercice 9
Résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x' &= -y+\sin(\alpha t) \\ y' &= x-\cos(\alpha t) \end{cases}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

2) $\begin{cases} x' &= x+y \\ y' &= y \end{cases}$

3) $\begin{cases} x' &= x+y-z \\ y' &= -x+2y+z \\ z' &= x+z \end{cases}$

4) $\begin{cases} x' &= x+2y-z+t \\ y' &= 2x+4y-2z \\ z' &= -x-2y+z \end{cases}$

Exercice 10 (systèmes à coefficients non constant)

Résoudre le système linéaire différentiel suivant : $\begin{cases} (1+t^2)x' = tx+y \\ (1+t^2)y' = -x+ty \end{cases}$

Indication : *Poser* $z = x+iy$.

Exercice 11 (idem)

On considère le système différentiel (E) : $\begin{cases} x' = (\mathrm{e}^t+t)x+(\mathrm{e}^t-t)y-t \\ y' = (\mathrm{e}^t-t)x+(\mathrm{e}^t+t)y+t \end{cases}$.

1) Ecrire ce système sous la forme $X' = AX+B$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ et $B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$.

2) Diagonaliser $A(t)$ avec une matrice de passage P qui ne dépend pas de t.

3) En déduire les solutions du système différentiel.

Exercice 12 (idem)

On considère le système différentiel (E) : $\begin{cases} x'(t) = -tx(t)+y(t)+1 \\ y'(t) = (1-t^2)x(t)+ty(t)+t \end{cases}$.

1) Ecrire ce système sous forme matricielle et vérifier que $X_1 : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ et $X_2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2+1 \end{pmatrix}$ sont solutions du système homogène (H) associé à (E).

2) Rechercher une solution particulière de (E) de la forme $X = aX_1 + bX_2$, où a et b sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3) En déduire la solution générale de (E).

Exercice 13 (se ramène à une équation différentielle classique)

1) Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\,\mathrm{d}t + 1$

2) Trouver toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x)$