# Exercices : Déterminants

**Exercice 1**
Calculer les déterminants des matrices suivantes, sous la forme la plus factorisée possible :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad xI_3 - A \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad xI_3 - B \text{ où } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin a & \sin 2a \\ 1 & \sin b & \sin 2b \\ 1 & \sin c & \sin 2c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix} \qquad (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} = (ij)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 2**
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique (c'est-à-dire $M^T = -M$). Montrer que $n$ impair entraîne $M$ non inversible.

**Exercice 3** (cours)
Soit $n \in \mathbb{N}$, $(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer par récurrence que

$$\det V_n = \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i)$$

Où

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

<u>Indication</u> : *effectuer l'opération suivante :* $C_{n+1} \longleftarrow C_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k C_k$, *avec* $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

**Exercice 4**
Soit $A$, $B$ et $C$ des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & A+C-B \end{pmatrix} = \det(A+C)\det(A-B)$$

**Exercice 5** (OT 237 — 2011 PT)
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Calculer $\det \begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix}$ en fonction de $\det A$ et $a$, $b$, $c$, $d$.

**Exercice 6**
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}$, $A = \begin{pmatrix} c & a & b \\ b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$.

**1)** Montrer que $P$ est inversible.

**2)** Calculer $AP$, en déduire $\det(AP)$ puis $\det(A)$.

**Exercice 7**
On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}JP = \begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

En déduire $\det(\alpha I_n + \beta J)$.