Lycée St Joseph
Classe de PC

Pour le jeudi 6 février 2020

Devoir de Mathématiques numéro 6

Correction

Exercice 1 (E3A MP 2017)

Il s'agit de l'étude d'une marche aléatoire, objet d'étude classique en probabilités, et donc classique dans les sujets de concours.

1) Voici les deux fonctions.

```python
def deplacement(L, a, b):
    if L == "N":
        return (a+1, b)
    if L == "E":
        return (a, b+1)


def chemin(m):
    a, b = (0, 0)
    Lx, Ly = [a], [b]
    for car in m:
        a, b = deplacement(car, a, b)
        Lx.append(a)
        Ly.append(b)
    return L
```

2) **a)** Il y a 2^ℓ trajets comportant exactement ℓ étapes.

b) *Si vous énumérez, soyez systématique — rangez les trajets dans un ordre logique, pour ne pas en oublier.*

Le nombre de trajets reliant l'origine au point de coordonnées $(3, 2)$ est égal au nombre de placement différents possibles de 2 « N » dans une chaîne de 5 caractères, donc

$$\boxed{\binom{5}{2} = 10}$$

c) Le nombre de trajets reliant l'origine au point de coordonnées (a, b) est égal au nombre de placement différents possibles de a « E » dans une chaîne de $a + b$ caractères, donc

$$\boxed{\binom{a+b}{a}}$$

Testez votre résultat pour a et b petits, par exemple avec la question précédente.

3) **a)** Comme $U_1 = (E_1 \cap N_2) \cup (N_1 \cap E_2)$, et que cette union est disjointe,

$$\boxed{P(U_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}}$$

b) Il y a le même nombre de chemins reliant le point de coordonnées (a,b) au point de coordonnées (c,d) que de chemins reliant le point de coordonnées $(0,0)$ au point de coordonnées $(c-a, d-b)$, calculé en 2)c) :

$$\text{Card } C_{(a,b)}^{(c,d)} = \text{Card } C_{(0,0)}^{(c-a,d-b)} = \binom{c+d-(a+b)}{c-a}$$

Donc

$$\boxed{C_{(0,1)}^{(n-1,n)} = \binom{2n-2}{n-1}}$$

c) Notons $\overline{T}_{(a,b)}^{(c,d)} = C_{(a,b)}^{(c,d)} - T_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a,b) à celui de coordonnées (c,d) et coupant la droite d'équation $y = x$.

D'après l'énoncé, Card $\overline{T}_{(a,b)}^{(c,d)} =$ Card $C_{(b,a)}^{(c,d)}$ dans le cas qui nous intéresse – c'est-à-dire (a,b) et (c,d) dans le même ordre, i.e. du même coté de la droite $y = x$. *(C'est le principe de réflexion).*

Donc ici, avec $(a,b) = (0,1)$ et $(c,d) = (n-1,n)$,

$$\boxed{\text{Card } \overline{T}_{(0,1)}^{(n-1,n)}} = \text{Card } C_{(1,0)}^{(n-1,n)} = \text{Card } C_{(0,0)}^{(n-2,n)} \boxed{= \binom{2n-2}{n}}$$

d) Par définition,

$$T_{(0,1)}^{(n-1,n)} = C_{(0,1)}^{(n-1,n)} - \overline{T}_{(0,1)}^{(n-1,n)}$$

Donc, d'après 3)b) et 3)c),

$$\begin{aligned}
\text{Card } T_{(0,1)}^{(n-1,n)} &= \binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n} \\
&= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} - \frac{(2n-2)!}{(n-2)!n!} \\
&= \frac{(2n-2)!}{(n-2)!(n-1)!}\Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) \\
&= \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Card } T_{(0,1)}^{(n-1,n)} = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}}$

e) Par symétrie du problème, la transformation $(x,y) \mapsto (y,x)$ est une bijection qui envoie $T_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ sur $T_{(1,0)}^{(n,n-1)}$. Donc

$$\boxed{\text{Card } T_{(1,0)}^{(n,n-1)} = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}}$$

f) *Toujours commencer par les événements.*

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. L'événement U_n se décompose en $U_n = (U_n \cap E_1) \cup (U_n \cap N_1)$, où l'union est disjointe ((E_1, N_1) est un système complet d'événements).

De plus $U_n \cap E_1 = U_n \cap E_1 \cap N_n$: pour arriver en (n,n) en étant parti vers l'est, sans couper $y = x$, le dernier mouvement est nécessairement vers le nord : la droite $y = x$ reste au nord pendant tout le trajet.

L'ensemble des trajets satisfaisant $U_n \cap E_1 \cap N_n$ est en bijection avec $T_{(0,1)}^{(n-1,n)}$. Donc d'après 2)a) et 3)d),

$$P(U_n \cap E_1 \cap N_n) = \frac{\text{Card } T_{(0,1)}^{(n-1,n)}}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$$

De même, $U_n \cap N_1 = U_n \cap N_1 \cap E_n$ et $P(U_n \cap N_1 \cap E_n) = P(U_n \cap E_1 \cap N_n)$, donc

$$\boxed{P(U_n) = \frac{1}{2^{2n-1}} \times \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}}$$

De plus, $(2n-2)! = \prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)(2k)$ et $n! = \prod_{k=1}^{n} k$, donc

$$\begin{aligned} P(U_n) &= \frac{(2n-2)!}{\Big[(2^n)n!\Big]\Big[(2^{n-1})(n-1)!\Big]} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)(2k)}{\prod_{k=1}^{n} 2k \prod_{k=1}^{n-1} 2k} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n} 2k} \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{P(U_n) = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}}$$

Vous auriez pu passer de la première à la seconde formule en écrivant tout au brouillon avec des pointillés, puis en prenant le temps de traduire par des produit $\prod_{k=\ldots}^{\ldots} \ldots$.

4) a) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{(2n)!2^{2n-1}n!(n-1)!}{2^{2n+1}(n+1)!n!(2n-2)!} = \dfrac{2n(2n-1)}{2^2 n(n+1)} = \dfrac{2n-1}{2n+2} = \dfrac{2n+2-3}{2n+2} = 1 - \dfrac{3}{2n+2}$

Donc, comme $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) = -x + O(x^2)$,

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{3}{2n+2}\right) = -\frac{3}{2n+2} + O(\frac{1}{n^2})$$

Par conséquent $a = -\dfrac{3}{2}$ et

$$\boxed{\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{3/2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

À partir du moment où vous connaissez vos DL usuels et prenez votre temps, cette question ne présente aucune difficulté.

b) *Exercice classique : exercice 3, feuille sur les séries numériques.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \dfrac{1}{n} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue, décroissante sur

$[1,+\infty[$, donc

$$\begin{aligned}
&\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in[n,n+1], && \frac{1}{n+1}\leqslant\frac{1}{t}\leqslant\frac{1}{n}\\
\Longrightarrow&\forall n\in\mathbb{N}^*, && \int_n^{n+1}\frac{1}{n+1}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_n^{n+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\int_n^{n+1}\frac{1}{n}\,\mathrm{d}t \quad \text{Par croissance de l'intégrale.}\\
\Longrightarrow&\forall n\in\mathbb{N}^*, && \frac{1}{n+1}\leqslant\int_n^{n+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{n}\\
\Longrightarrow&\forall n\in\mathbb{N}^*, && \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\leqslant -u_n\leqslant 0\\
\Longrightarrow&\forall n\in\mathbb{N}^*, && 0\leqslant u_n\leqslant\frac{1}{n(n+1)}
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{1}{n(n+1)}\sim\dfrac{1}{n^2}$, et $\sum\dfrac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $\alpha=2>1$), donc par comparaison et majoration, $\sum u_n$ converge. Notons $\gamma=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$. Il vient,

$$\sum_{n=1}^{N-1}u_n=\gamma+o(1)$$

Or $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1}u_n=\sum_{n=1}^{N-1}\Big(\frac{1}{n}-\int_n^{n+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\Big)=\Big(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}\Big)-\int_1^N\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\Big(\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}\Big)-\ln N$. D'où

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}\underset{N\to+\infty}{=}\ln(N)+\gamma+o(1)}$$

c) Soit $N\geqslant 2$. On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{n=1}^{N-1}\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)=\sum_{n=1}^{N-1}\Big(\ln v_{n+1}-\ln v_n\Big)=\ln v_N-\ln v_1$$

De plus $v_1=P(U_1)=\dfrac{1}{2}$ d'après 3)a).
D'autre part, d'après 4)a), il existe une suite (w_n) telle que

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)=-\frac{3/2}{n}+w_n \qquad \text{où} \qquad w_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Toujours donner des noms avant de sommer : on ne somme pas (jusqu'à N) des o et des O.

Par comparaison, la série $\sum w_n$ converge, notons $W=\sum_{n=1}^{+\infty}w_n$. Il vient,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N-1}\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)&=-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{N-1}w_n\\
&=-\frac{3}{2}(\ln(N)+\gamma+o(1))+W+o(1) \qquad \text{D'après 4)b)}
\end{aligned}$$

Donc $\ln v_N=-3/2\ln N+\Big[-3/2\gamma+W-\ln 2\Big]+o(1)$. Notons $K=-3/2\gamma+W-\ln 2$. En passant à l'exponentielle et en effectuant un développement limité de $e^{o(1)}$, nous obtenons

$$v_N=e^{-3/2\ln N}e^Ke^{o(1)}=\frac{e^K}{N^{\frac{3}{2}}}(1+o(1))$$

Par conséquent, avec $k=e^K>0$,

$$\boxed{v_N\underset{N\to+\infty}{\sim}\frac{k}{N^{\frac{3}{2}}}}$$

d) *La première partie de la question ne dépend que du résultat – donné – de la question 3)f).*

$$\begin{aligned}(2n-1)v_n-(2n+2)v_{n+1} &= (2n-1)\frac{1}{2^{2n-1}}\times\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}-2(n+1)\frac{1}{2^{2n+1}}\times\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}\\ &= \frac{1}{2^{2n}}\times\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}\left[2(2n-1)-\frac{(n+1)2n(2n-1)}{(n+1)n}\right]\\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2, \qquad v_{n+1}=(2n-1)v_n-(2n+1)v_{n+1}}$$

Ainsi, pour tout $N\geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} v_{n+1}=\sum_{n=2}^{N}\Big[(2n-1)v_n-(2n+1)v_{n+1}\Big]$

$$= 3v_2-(2N+1)v_{N+1} \qquad \text{(somme télescopique)}$$

Par conséquent, comme $(2N+1)v_N\sim 2N\dfrac{k}{N^{3/2}}=\dfrac{2k}{\sqrt{N}}$, $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} v_n=3v_2$. Puis,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}P(U_n)=v_1+4v_2=\frac{1}{2}+4\frac{1}{2\times 4}=1$$

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}P(U_n)=1}$.

Les U_n sont deux à deux disjoints, donc

$$P\left(\bigcup_{n\geqslant 1}U_n\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(U_n)=1$$

Ainsi, une marche aléatoire rencontre presque sûrement la droite $y=x$.

Exercice 2 (Étude d'une marche aléatoire)

Je vous rappelle une des méthode principales en probabilités : commencer par décrire précisément les événements.

Partie 1 (Calcul des probabilités)

1) À $n=0$, le pion est en A : $A_0=\Omega$ est l'événement certain, et $B_0=C_0=\emptyset$. Donc

$$\boxed{p_0=1, \quad q_0=r_0=0}$$

Pour $n=1$, on sait que l'on est parti de A, donc on applique le point 2 en « sachant que l'on part de A. ». Rester sur place est l'événement A_1, et B_1 et C_1 consiste à se déplacer déplacer est l'événement

$$\boxed{p_1=1/2, \quad q_1=r_1=1/4}$$

2) *Il s'agit de calculer p_{n+1}, q_{n+1} et r_{n+1}, donc de décrire A_{n+1}, B_{n+1} et C_{n+1}. Il faut prendre son temps, c'est un grand classique.* Soit $n\in\mathbb{N}$.

- Calcul de p_{n+1} : On applique la formule des probabilités totales à l'aide du système complet d'événements (A_n,B_n,C_n) :

$$A_{n+1}=\Big(A_{n+1}\cap A_n\Big)\cup\Big(A_{n+1}\cap B_n\Big)\cup\Big(A_{n+1}\cap C_n\Big)$$

Puis :

$$\begin{aligned}p_{n+1} &= P(A_{n+1})\\ &= P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n)+P_{B_n}(A_{n+1})P(B_n)+P_{C_n}(A_{n+1})P(C_n) \quad \text{(formule des probabilités totales)}\\ &= \frac{1}{2}p_n+\frac{1}{4}q_n+\frac{1}{4}r_n \qquad \text{(point 2)}\\ &= \frac{1}{4}(2p_n+q_n+r_n)\end{aligned}$$

- Calcul de q_{n+1} : On applique de même la formule des probabilités totales à l'aide du même système complet d'événements :

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= P(B_{n+1}) \\ &= P_{A_n}(B_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(B_{n+1})P(C_n) \\ &= \frac{1}{4}(p_n + 2q_n + r_n) && \text{(point 2)} \end{aligned}$$

- Calcul de q_{n+1} : De même :

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= P_{A_n}(C_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(C_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(C_{n+1})P(C_n) \\ &= \frac{1}{4}(p_n + q_n + 2r_n) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_{n+1} = MV_n}$$

3) *Montrer que : il faut mettre un minimum d'étapes, donc ici faire la récurrence.*
Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n : \quad V_n = M^n V_0$$

est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

- $\mathcal{H}_0$: est vraie par hypothèse : $M^0 = I_3$.
- $\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$: Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= MV_n && \text{Question 2 précédente} \\ &= M^{n+1}V_0 && (\mathcal{H}_n) \end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad V_n = M^n V_0}$

M^n est donnée par l'énoncé, et $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc il vient

$$\boxed{\begin{aligned} p_n &= \frac{4^n + 2}{3 \cdot 4^n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 4^n} \\ q_n &= \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n} \\ r_n &= \frac{4^n - 1}{3 \cdot 4^n} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 4^n} \end{aligned}}$$

4) En conclusion, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{3 \cdot 4^n} = 0$,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = \lim_{n \to +\infty} q_n = \lim_{n \to +\infty} r_n = \frac{1}{3}}$$

Lorsque le nombre de déplacement tends vers l'infini, l'emplacement du pion tends vers une loi uniforme sur $\{A, B, C\}$.

Partie 2 (Nombre moyen de passages en A)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre moyen de passages du pion en A entre l'étape 1 et l'étape n et on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 \text{ si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 \text{ si } \overline{A_n} \text{ est réalisé} \end{cases}.$$

Lorsqu'on vous parle d'une variable aléatoire X, vous devez avoir le réflexe : $X(\Omega) = ?$.

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n mesure si le pion est, ou non, en A à la n-ième étape. Donc

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } X_1 + \cdots + X_n \text{ mesure le nombre de passage en } A \text{ entre l'étape 1 et l'étape } n.}$$

L'espérance de cette variable aléatoire mesure la moyenne des valeurs que peut prendre cette variable, pondérée par la loi de cette variable. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n] = a_n \text{ le nombre moyen de passages du pion en } A \text{ entre l'étape 1 et l'étape } n}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$, donc X_n suit une loi de Bernoulli. De plus, par définition de X_n, $P(X_n = 1) = P(A_n) = p_n$. Donc

$$X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(p_n)$$

Par conséquent,

$$\boxed{E(X_n) = p_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 4^n}}$$

3) Par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned}
a_n &= E\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} E(X_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} p_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 4^k}\Big) && \textit{On n'oublie pas de remplacer} \\
&= \frac{n}{3} + \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4^k} && \textit{puis de calculer : série géométrique} \\
&= \frac{n}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1 - 1/4^n}{1 - 1/4} \\
&= \frac{n}{3} + \frac{2}{9}\Big(1 - \frac{1}{4^n}\Big)
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{a_n = \frac{n}{3} + \frac{2}{9}\Big(1 - \frac{1}{4^n}\Big)}$$

Partie 3 (Temps d'attente avant le premier passage en B)

On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante :

1. si le pion ne passe jamais en B, on pose $T_B = 0$;
2. sinon, T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B.

Nous allons déterminer la loi de T_B et son espérance.

1) Comme on commence en A, il n'est pas nécessaire d'indiquer ce qui se passe au temps 0 : on sera forcément en A. Ainsi,

$$(T_B = 1) = B_1$$

Donc $\boxed{P(T_B = 1) = q_1 = \frac{1}{4}}$

De plus,

$$(T_B = 2) = \overline{B_1} \cap B_2$$

Or on sait – point 2 – que $P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = 1/4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la formule des probabilités composée s'écrit $P(T_B = 2) = P_{\overline{B_1}}(B_2)P(\overline{B_1}) = \dfrac{1}{4}(1 - q_1)$, puis

$$\boxed{P(T_B = 2) = \frac{3}{16}}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si le pion n'est pas en B, il est en A ou en C :

$$\boxed{\overline{B_n} = A_n \cup C_n}$$

3) *Vous pouvez faire un calcul, on attend donc un calcul plutôt qu'une explication plus ou moins rigoureuse.*
Comme $B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1} = \left(B_3 \cap A_2 \cap \overline{B_1}\right) \cup \left(B_3 \cap C_2 \cap \overline{B_1}\right)$, où l'union est disjointe, donc

$$P\left(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}\right) = P\left(B_3 \cap A_2 \cap \overline{B_1}\right) + P\left(B_3 \cap C_2 \cap \overline{B_1}\right)$$

La formule des probabilités composée s'écrit

$$P(B_3 \cap A_2 \cap \overline{B_1}) = P_{A_2 \cap \overline{B_1}}(B_3)P(A_2 \cap \overline{B_1})$$

Or la position en $n+1$ ne dépend que de la position en n (point 1), donc $P_{A_2 \cap \overline{B_1}}(B_3) = P_{A_2}(B_3) = \dfrac{1}{4}$
Ainsi,

$$P(B_3 \cap A_2 \cap \overline{B_1}) = \frac{1}{4}P(A_2 \cap \overline{B_1})$$

De même,
$$\begin{aligned} P(B_3 \cap C_2 \cap \overline{B_1}) &= P_{C_2 \cap \overline{B_1}}(B_3)P(C_2 \cap \overline{B_1}) \\ &= P_{C_2}(B_3)P(C_2 \cap \overline{B_1}) \\ &= \frac{1}{4}P(C_2 \cap \overline{B_1}) \end{aligned}$$
Par conséquent,

$$\begin{aligned} P(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) &= P\left(B_3 \cap A_2 \cap \overline{B_1}\right) + P\left(B_3 \cap C_2 \cap \overline{B_1}\right) && \text{union disjointe } \overline{B_2} = A_2 \cup C_2 \\ &= \frac{1}{4}\left(P(A_2 \cap \overline{B_1}) + P(C_2 \cap \overline{B_1})\right) && \text{ci-dessus} \\ &= \frac{1}{4}P(\overline{B_2} \cap \overline{B_1}) && \text{union disjointe idem} \end{aligned}$$

De plus, comme $P(\overline{B_2} \cap \overline{B_1}) \neq 0$, la définition des probabilités composées nous donne :

$$\boxed{P_{\overline{B_2} \cap \overline{B_1}}(B_3) = \frac{P(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1})}{P(\overline{B_2} \cap \overline{B_1})} = \frac{1}{4}}$$

4) Calcul de $P(T_B = k)$:

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $(T_B = k) = B_k \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} \overline{B_i}\right)$, donc

$$\begin{aligned} P(T_B = k) &= P\left(B_k \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} \overline{B_i}\right)\right) \\ &= P_{\left(\bigcap_{i=1}^{k} \overline{B_i}\right)}(B_k)P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \overline{B_i}\right) && \text{Probabilités composées} \\ &= \frac{1}{4}P\left(\bigcap_{i=1}^{k} \overline{B_i}\right) && \text{Admis dans l'énoncé} \end{aligned}$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{B_i}\right)$. $u_0 = P(\Omega) = 1$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= P_{\overline{B_n}}(\overline{B_{n+1}})P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{B_i}\right) && \text{Probabilités composées, et } \overline{B_{n+1}} \text{ ne dépend que de } n \\ &= (1 - P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}))u_n \\ &= \frac{3}{4}u_n \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Ainsi,

$$\boxed{P(T_B = k) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}}$$

<u>Calcul de $\mathbb{P}(T_B = 0)$</u> : Comme $T_B(\Omega) = \mathbb{N}$, et que donc $(T_B = k)_{k\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_B = 0) &= 1 - P(\overline{T_B = 0}) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(T_B = k) \\ &= 1 - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \\ &= 0 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{P(T_B = 0) = 0}$$

5) La variable aléatoire T_B suit une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{4}$, donc elle admet une espérance et

$$\boxed{E(T_B) = \frac{1}{p} = 4}$$