Lycée St Joseph
Classe de PC

Pour le jeudi 6 février 2020

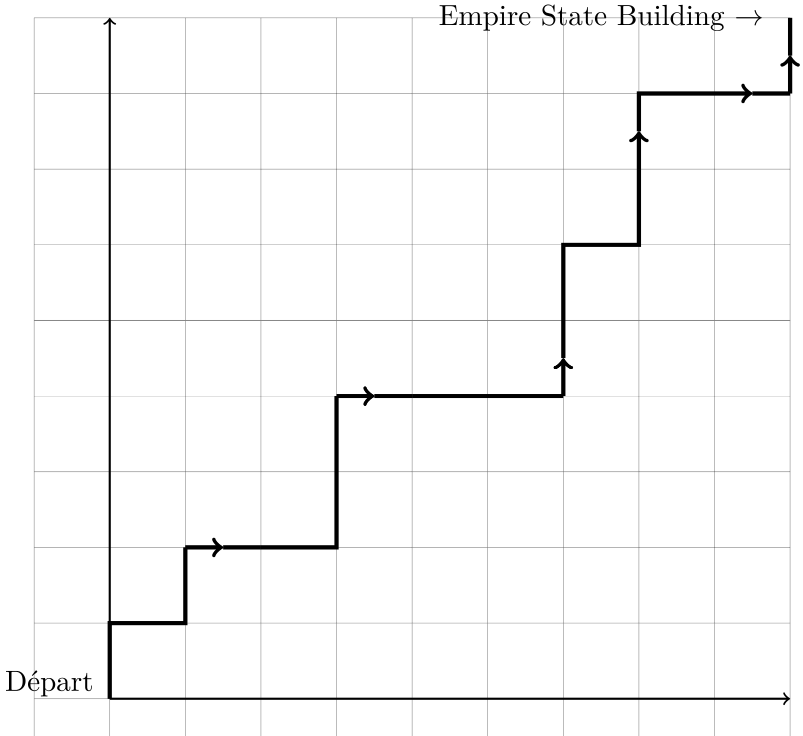
Devoir de Mathématiques numéro 6

Exercice 1

Le but de cet exercice est de modéliser le trajet d'un piéton dans une grande ville dont les rues se croisent à angle droit.
À New-York, dans le quartier de Manhattan, un piéton voit au loin, dans la direction du Nord, le gratte-ciel Empire State Building sous un angle de 45 degrés vers l'Est.
A chaque croisement de rues, le piéton choisit d'aller soit vers le Nord (N), soit vers l'Est E).
On appelle étape le déplacement du piéton entre deux croisements consécutifs. Soit ℓ un entier naturel non nul. Un trajet de ℓ étapes est représenté par une suite $(u_1, u_2, \dots, u_\ell)$ avec, pour tout entier i compris entre 1 et ℓ, $u_i = E$ si, au i-ème croisement, le piéton s'est dirigé vers l'Est et $u_i = N$ si, au i-ème croisement, le piéton s'est dirigé vers le Nord.
On définit l'origine du repère au point de départ du piéton, chaque croisement du trajet a pour coordonnées (x, y) où x reprśente le nombre de rues vers l'Est depuis l'origine et y le nombre de rues vers le Nord toujours depuis l'origine, les croisements se situent à égales distances. A chaque trajet de ℓ étapes (ℓ est un entier naturel non nul) on associe le chemin passant par la suite des points de coordonnées (x_k, y_k) pour $0 \leqslant k \leqslant \ell$ définies par récurrence par :
$x_0 = y_0 = 0$
pour $1 \leqslant k \leqslant \ell$,

$$(x_k, y_k) = \begin{cases} (x_{k-1}, y_{k-1} + 1) & \text{si} \quad u_k = N \\ (x_{k-1} + 1, y_{k-1}) & \text{si} \quad u_k = E \end{cases}$$

La figure ci-jointe illustre un trajet de 18 étapes du piéton.



Le trajet est (N,E,N,E,E,N,N,E,E,E,N,N,E,N,N,E,E,N)

1) **a)** Écrire en langage Python une fonction `deplacement(L,a,b)` dont la valeur est $(a, b+1)$ si $L = "N"$ et $(a+1, b)$ si $L = "E"$.

b) Écrire une fonction `chemin(m)` où m est une chaîne constituée des caractères "N" et "E" et qui renvoie la liste des abscisses ainsi que la liste des ordonnées des points du trajet.

2) **a)** En remarquant qu'à chaque étape on a deux choix possibles, déterminer le nombre de trajets comportant exactement ℓ étapes où $\ell \in \mathbb{N}^*$.

b) Le nombre de chemins reliant l'origine au point de coordonnées $(3,2)$ est égal au nombre de trajets de cinq étapes comportant deux étapes N et trois étapes E, en déduire le nombre de trajets reliant l'origine au point de coordonnées $(3,2)$.

c) Plus généralement, soit un point M de coordonnées (a,b) avec $(a,b) \neq (0,0)$, déterminer le nombre de chemins reliant l'origine à ce point M.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle U_n l'événement "Le chemin passe pour la première fois à l'étape $2n$ par un point de la droite Δ d'équation $y = x$". On pourra noter N_k l'événement "à l'étape k, le déplacement se fait vers le Nord" et E_k l'événement "à l'étape k, le déplacement se fait vers l'Est".

a) Calculer la probabilité de l'événement U_1.

b) Soient quatre entiers naturels a,b,c,d, on note $C_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a,b) au point de coordonnées (c,d). Déterminer le cardinal de l'ensemble $C_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$ pour $n \geqslant 2$.

c) Soit $n \geqslant 2$. On admet pour des raisons de symétrie que le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$ est égal au nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(1,0)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$. Déterminer le nombre de chemins reliant le point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$ et coupant la droite d'équation $y = x$.

Soient quatre entiers naturels a,b,c,d, on note $T_{(a,b)}^{(c,d)}$ l'ensemble des chemins reliant le point de coordonnées (a,b) au point de coordonnées (c,d) ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

d) En déduire le cardinal de l'ensemble $T_{(0,1)}^{(n-1,n)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(0,1)$ au point de coordonnées $(n-1,n)$ ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

e) Déterminer de même le cardinal de l'ensemble $T_{(1,0)}^{(n,n-1)}$ des chemins reliant le point de coordonnées $(1,0)$ au point de coordonnées $(n,n-1)$ ne coupant pas la droite d'équation $y = x$.

f) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$:

$$P(U_n) = \frac{1}{2^{2n-1}} \times \frac{(2n-2)!}{n!\ (n-1)!}$$

puis que

$$P(U_n) = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n}.$$

4) On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = P(U_n)$.

a) Déterminer le réel a tel que :

$$\ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

b) En appliquant la comparaison série-intégrale, montrer qu'il existe une constante γ réelle telle que :

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{=} \ln(N) + \gamma + o(1).$$

c) En calculant de deux manières différentes la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1} \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$, montrer qu'il existe une constante $k > 0$ telle que :

$$v_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{k}{N^{\frac{3}{2}}}$$

d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, v_{n+1} = (2n-1)v_n - (2n+1)v_{n+1}$, en déduire la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} P(U_n)$, que peut-on en déduire ?

Exercice 2 (Étude d'une marche aléatoire)

On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C. Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.
À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

1. le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ; plus précisément, il ne dépend pas des positions occupées aux autres étapes précédentes.
2. pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "le pion se trouve en A à l'étape n", B_n l'évènement "le pion se trouve en B à l'étape n" et C_n l'évènement "le pion se trouve en C à l'étape n". On note également :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \mathbb{P}(A_n), \quad q_n = \mathbb{P}(B_n), \quad r_n = \mathbb{P}(C_n), \quad V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix},$$

et on considère la matrice :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans le démontrer** le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que si E et F sont deux évènements avec $\mathbb{P}(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $\mathbb{P}(E \mid F)$ ou $\mathbb{P}_F(E)$) par :

$$\mathbb{P}(E \mid F) = \mathbb{P}_F(E) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)}.$$

Partie 1 (Calcul des probabilités)

1) Calculer les nombres p_n, q_n et r_n pour $n = 0$ et $n = 1$.

2) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation $V_{n+1} = MV_n$.

3) En déduire que $V_n = M^n V_0$, puis une expression de p_n, q_n et r_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter le résultat.

Partie 2 (Nombre moyen de passages en A)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note a_n le nombre moyen de passages du pion en A entre l'étape 1 et l'étape n et on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 \text{ si } A_n \text{ est réalisé} \\ 0 \text{ si } \overline{A_n} \text{ est réalisé} \end{cases}.$$

1) Interpréter la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ et le nombre $\mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n]$.

2) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3) En déduire une expression de a_n.

Partie 3 (Temps d'attente avant le premier passage en B)

On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante :

1. si le pion ne passe jamais en B, on pose $T_B = 0$;
2. sinon, T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B.

Nous allons déterminer la loi de T_B et son espérance.

1) Calculer $\mathbb{P}(T_B = 1)$ et $\mathbb{P}(T_B = 2)$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\overline{B_n}$ en fonction de A_n et C_n.

3) Établir que $\mathbb{P}(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) = \dfrac{1}{4}\mathbb{P}(\overline{B_2} \cap \overline{B_1})$, puis en déduire que $\mathbb{P}(B_3 \mid \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) = \dfrac{1}{4}$.

Dans la suite, on admet la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\left(B_{n+1} \;\middle|\; \bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}\right) = \frac{1}{4}.$$

4) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(T_B = k)$. Que vaut $\mathbb{P}(T_B = 0)$?

5) Justifier que la variable aléatoire T_B admet une espérance. Quelle est l'espérance de T_B ?