Lycée St Joseph
Classe de PC

Pour le jeudi 7 février 2019

Devoir de Mathématiques numéro 6

Correction

Exercice 1 (INP PC 2018 – complet)

Partie I - Quelques résultats généraux

Q1. n=0 : $U_0 = (X^2-1)^0 = 1$ et $\boxed{L_0 = U_0^{(0)} = 1}$
n=1 : $U_1 = X^2 - 1$ et $\boxed{L_1 = \dfrac{1}{2^1 1!}U_1' = X}$
n=2 : $U_2 = (X^2-1)^2$ donc $U_2' = 2(2X)(X^2-1) = 4(X^3 - X)$ et $U_2'' = 4(3X^2-1)$. Comme $L_2 = \dfrac{1}{2^2 2!}U_2''$,

$$\boxed{L_2 = \frac{1}{2}(3X^2-1)}$$

Q2. Comme $\deg(X^2-1) = 2$, $\deg U_n = 2n$. De plus la formule du binome de Newton nous donne :

$$U_n = (X^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k X^{2n-2k} = X^{2n} + Q \qquad \text{avec} \qquad Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$$

En dérivant n fois, il vient

$$\begin{aligned} U_n^{(n)} &= 2n(2n-1)\dots(2n-n+1)X^n + Q^{(n)} \qquad\qquad \text{où } \deg Q^{(n)} = \deg Q - n \leqslant n-1 \\ &= \frac{(2n)!}{n!}X^n + Q^{(n)} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{L_n \text{ est de degré } n \text{ et } a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}}$$

On vérifie évidemment toutes ses formules sur les polynômes L_0, L_1, L_2 (et L_3 si vous n'avez pas confiance en vous), comme toujours dans ce genre de sujet sur une famille de polynômes. On vous demandait d'ailleurs fort aimablement de les calculer à la première question.
Pour trouver la formule, on n'hésite pas à utiliser des pointillés, et à ajuster les derniers termes du produit en testant pour n petit.

Q3. Montrons que $(L_0, \dots, L_n)$ est libre : Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i L_i = 0 \tag{1}$$

Supposons qu'il existe $i \in [\![0,n]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$. Notons alors

$$i_0 = \max\{i \mid \lambda_i \neq 0\}$$

(Cet ensemble est non vide et majoré par n donc admet un maximum). Ainsi, pour tout $i > i_0$, $\lambda_i = 0$ et l'équation 1 s'écrit alors

$$\sum_{i=0}^{i_0} \lambda_i L_i = 0$$

En isolant L_{i_0}, comme $\lambda_{i_0} \neq 0$ par construction,

$$L_{i_0} = -\frac{1}{\lambda_{i_0}} \sum_{i=0}^{i_0-1} \lambda_i L_i$$

Et en regardant les degrés [1], le membre de droite est de degré au plus $i_0 - 1$ et celui de gauche de degré i_0 (d'après 2). Ce qui est absurde.
Ainsi, $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $\lambda_i = 0$ et

$$\text{La famille } (L_0, \ldots, L_n) \text{ est libre.}$$

De plus c'est une famille de $n+1$ vecteurs et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$. Conclusion :

$$\boxed{\text{La famille } (L_0, \ldots, L_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$$

Q4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n = \big[(X-1)(X+1)\big]^n = (X-1)^n(X+1)^n$$

Ainsi,

$$\boxed{U_n \text{ a pour racines } 1 \text{ de multiplicité } n \text{ et } -1 \text{ de multiplicité } n}$$

Caractérisation de la multiplicité d'une racine :

$$\alpha \in \mathbb{R} \text{ racine d'ordre } m \in \mathbb{N}^* \text{ de } P \iff P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(\alpha) \neq 0$$

En phrases : il y a exactement m annulations en dérivant (de $P^{(0)}(\alpha) = 0$ à $P^{(m-1)}(\alpha) = 0$). Les polynômes, c'est un peu du Python, on commence à compter à partir de 0.
Ce qui entraine en particulier : (α racine d'ordre $m > 1$ de P) $\Longrightarrow$ (α racine d'ordre $m-1$ de P').
Donc $\alpha = 1$ est racine d'ordre $n-1$ de U_n', et de meme pour $\alpha = -1$:

$$U_n' = (X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}Q \quad \text{avec} \quad Q \in \mathbb{R}[X]$$

De plus $\deg U_n' = 2n-1$ donc $\deg Q = 1$. Ainsi, $Q = \lambda(X - \alpha)$ avec $\lambda \neq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Montrons que $\alpha \in]-1,1[$. La fonction polynomiale U_n est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ puisque $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $U_n(1) = U_n(-1) = 0$. Donc le théorème de Rolle s'écrit

$$\exists c \in]-1,1[, \qquad U_n'(c) = 0$$

Ainsi, comme il ne reste plus qu'une seule racine de U_n', α, qui ne vaut ni 1 ni -1, $\alpha = c \in]-1,1[$. Conclusion :

$$\boxed{\text{Il existe } \alpha \in]-1,1[\text{ et } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tels que : } U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha)}$$

1. Dans les polynômes, il faut toujours regarder le degré : c'est nombre entier, ce qui est plus facile à comprendre qu'un polynôme, et il donne beaucoup d'informations – par exemple il majore le nombre de racines. Ici comparer les degrés suffit à prouver que la famille est libre : toute famille de degré échelonné est libre.

Q5. Comme $n-k>0$, $\alpha_0=-1$ et $\alpha_{k+1}=-1$ sont des racines de $U_n^{(k)}$ par hypothèse. Quitte à réordonner les α_i, on peut les supposer rangés par ordre croissant :

$$-1=\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_k<\alpha_{k+1}=1$$

Pour tout $i\in[\![0,k]\!]$, la fonction $U_n^{(k)}$ est continue sur $[\alpha_i,\alpha_{i+1}]$, dérivable sur $]\alpha_i,\alpha_{i+1}[$ et $U_n^{(k)}(\alpha_i)=U_n^{(k)}(\alpha_{i+1})=0$. Donc, comme $(U_n^{(k)})'=U_n^{(k+1)}$, le théorème de Rolle nous dit

$$\exists\beta_i\in]\alpha_i,\alpha_{i+1}[,\qquad U_n^{(k+1)}(\beta_i)=0$$

Fixons $\beta_0,\dots,\beta_k$ qui convienne. Les β_i sont dans des intervalles disjoints, ils sont donc distincts et même $-1<\beta_0<\cdots<\beta_k<1$. De même qu'au 4, 1 et -1 sont des racines d'ordre $n-k-1$ de $U_n^{(k+1)}$. Donc

$$U_n^{(k+1)}=(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\dots(X-\beta_{k+1})Q\quad\text{avec}\quad Q\in\mathbb{R}[X]$$

En regardant prenant le degré, on trouve $\deg Q=0$. C'est-à-dire $Q=\nu\in\mathbb{R}^*$. En conclusion :

Il existe des réels $\beta_0,\dots,\beta_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel ν tels que :

$$\boxed{U_n^{(k+1)}=\nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_0)\cdots(X-\beta_k)}$$

Q6. Supposons $n\geqslant 2$. Montrons par récurrence que la propriété :

$\mathcal{H}_k$: Il existe des réels $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)}=\mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k)$$

est vraie pour tout $k\in[\![1,n]\!]$.

- $\underline{\mathcal{H}_1}$: a été montré à la question 4. *On pouvait aussi partir de $\mathcal{H}_0$, en adaptant un peu la propriété.*
- $\underline{\mathcal{H}_k\Longrightarrow\mathcal{H}_{k+1}}$: Soit $k\in[\![1,n-1]\!]$. Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie. À la question 5, nous avons prouvé qu'il existe des réels $\beta_0,\dots,\beta_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel ν tels que :

  $$U_n^{(k+1)}=\nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_0)\cdots(X-\beta_k)$$

  C'est-à-dire $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
- Conclusion : $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.

En particulier pour $k=n$: Il existe des réels $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(n)}=\mu(X-1)^{n-n}(X+1)^{n-n}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)=\mu\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$$

Ce résultat est aussi vrai pour $n=1$: $U_1'=2X$ et $\alpha_1=0\in]-1,1[$. Comme L_n est égal à $U_n^{(n)}$ à un scalaire près,

$$\boxed{\text{Pour } n\in\mathbb{N}^*,\ L_n \text{ admet } n \text{ racines réelles simples, toutes dans }]-1,1[.}$$

Partie II - Étude des éléments propres de l'endomorphisme φ

Q7. Montrons que φ est linéaire : Soit $P,Q\in\mathbb{R}[X]^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P+Q)&=(X^2-1)(\lambda P+Q)''+2X(\lambda P+Q)'\\&=\lambda(X^2-1)P''+(X^2-1)Q''+2\lambda XP'+2XQ'\\&=\lambda\varphi(P)+\varphi(Q)\end{aligned}$$

Donc φ est linéaire.

Endomorphisme : Pour tout $P\in\mathbb{R}[X]$, $\varphi(P)$ est un polynôme.

Pour ce point, il s'agit surtout de montrer au correcteur que vous saviez quoi regarder – il n'y a rien à faire.

Conclusion :

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}[X]}$$

Q8. Montrons que $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$:

$$\begin{aligned}
Q \in \varphi(\mathbb{R}_n[X]) &\Longrightarrow \exists P \in \mathbb{R}_n[X], \quad Q = \varphi(P) = (X^2-1)P'' + 2XP' \\
&\Longrightarrow \exists P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \deg Q \leqslant \max(\deg((X^2-1)P''), \deg(XP')) \\
&\text{Or } \deg((X^2-1)P'') = 2 + \deg(P'') \leqslant 2 + \deg P - 2 \leqslant n \text{ et } \deg XP' \leqslant n \text{ de même.} \\
&\Longrightarrow \deg Q \leqslant n \\
&\Longrightarrow Q \in \mathbb{R}_n[X]
\end{aligned}$$

On remarque que, si $n = 0$ ou 1, $P'' = 0$ et le premier terme de $\varphi(P)$ est nul. D'où la majoration : $\deg((X^2-1)P'') \leqslant 2 + \deg P - 2$. Le polynôme P'' peut être nul, et son degré $-\infty$.
Conclusion :

$$\boxed{\mathbb{R}_n[X] \text{ est stable par } \varphi}$$

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Comme $f(F) = \{f(x) \mid x \in F\}$, on peut aussi rédiger ainsi :

$$\begin{aligned}
x \in F &\Longrightarrow \dots \\
&\Longrightarrow f(x) \in F
\end{aligned}$$

Q9. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. D'après 8), φ laisse stable $\mathbb{R}_k[X]$, donc $\varphi_n(X^k) = \varphi(X^k) \in \mathbb{R}_k[X]$. Ainsi

$$\varphi_n(X^k) = m_{0,k} + m_{1,k}X + \cdots + m_{k,k}X^k$$

Donc

$$\boxed{\text{La matrice } M \text{ est triangulaire supérieure}}$$

De plus *(un calcul effectif de $\varphi_n(X^k)$ n'est pas très compliqué)*

$$\begin{aligned}
\varphi_n(X^k) &= (X^2-1)k(k-1)X^{k-2} + 2X(kX^{k-1}) \\
&= \Big(k(k-1) + 2k\Big)X^k - k(k-1)X^{k-2} \\
&= k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], \quad m_{k,k} = k(k+1)}$$

Q10. La matrice M est triangulaire, donc ses éléments diagonaux $m_{k,k} = k(k+1)$ sont ses valeurs propres. Or les $((k(k+1))_{0 \leqslant k \leqslant n}$ sont deux à deux distincts : φ_n admet $n+1$ valeurs propres 2 à 2 distinctes, et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$. En conclusion,

$$\boxed{\varphi_n \text{ est diagonalisable}}$$

Q11. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. $U_k = (X^2-1)^k$ et $U_k' = k(2X)(X^2-1)^{k-1}$. Donc

$$(X^2-1)U_k' - 2kXU_k = (X^2-1)k(2X)(X^2-1)^{k-1} - 2kX(X^2-1)^k = 0$$

Finalement,

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!], \quad (X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0}$$

Q12. Rappel de la formule de Leibniz : si f et g sont de classe $\mathscr{C}^n$,

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Comme toujours, commencer par écrire la formule avec les notations du cours, puis traduire dans celles de l'énoncé. Si vous ne vous souvenez plus de la formule, juste qu'il est question de $(fg)^{(n)}$ et qu'il y a une somme, testez les premiers termes : $(fg)'$, $(fg)''$ et $(fg)'''$. Vous reconnaîtrez la formule du binôme et retrouverez la formule.

En dérivant $(k+1)$ fois $\left[(X^2-1)U_k'\right]$, comme $(X^2-1)^{(i)} = 0$ pour tout $i > 2$,

$$\begin{aligned}
\left[(X^2-1)U_k'\right]^{(k+1)} &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (X^2-1)^{(i)} U_k^{(k+1-i+1)} \\
&= \sum_{i=0}^{2} \binom{k+1}{i} (X^2-1)^{(i)} U_k^{(k+1-i+1)} \\
&= \binom{k+1}{0} (X^2-1) U_k^{(k+2)} + \binom{k+1}{1} (2X) U_k^{(k+1)} + \binom{k+1}{2} (2) U_k^{(k)} \\
&= (X^2-1) U_k^{(k+2)} + 2(k+1) X U_k^{(k+1)} + (k+1) k U_k^{(k)}
\end{aligned}$$

De même pour $2kXU_k$,

$$\begin{aligned}
\left[2kXU_k\right]^{(k+1)} &= \sum_{i=0}^{1} \binom{k+1}{i} (2X)^{(i)} U_k^{(k+1-i)} \\
&= (2kX) U_k^{(k+1)} + 2(k+1) k U_k^{(k)}
\end{aligned}$$

Donc, en dérivant $(k+1)$ fois le membre de gauche de la relation de la question 11, il vient

$$\begin{aligned}
&= (X^2-1) U_k^{(k+2)} + 2(k+1) X U_k^{(k+1)} + (k+1) k U_k^{(k)} - (2kX) U_k^{(k+1)} - 2(k+1) U_k^{(k)} \\
&= \left[(X^2-1)\right] U_k^{(k+2)} + \left[2(k+1)X - 2kX\right] U_k^{(k+1)} + \left[(k+1)k - 2(k+1)k\right] U_k^{(k)}
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{(X^2-1) U_k^{(k+2)} + 2X U_k^{(k+1)} - k(k+1) U_k^{(k)} = 0}$$

Q13. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Comme $L_k = \dfrac{1}{2^k k!} U_k^{(k)}$,

$$\begin{aligned}
\varphi_n(L_k) &= (X^2-1) L_k'' + 2X L_k' \\
&= \frac{1}{2^k k!} \left((X^2-1) U_k^{(k+2)} + 2X U_k^{(k+1)} \right) \\
&= \frac{1}{2^k k!} \left(k(k+1) U_k^{(k)} \right) && \text{D'après la question 12} \\
&= k(k+1) L_k
\end{aligned}$$

Conclusion : comme $L_k \neq 0$, *(un vecteur propre est* ***non nul****)*

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in [\![0, n]\!],\ L_k \text{ est un vecteur propre de } \varphi_n \text{ pour la valeur propre } \lambda = k(k+1)}$$

Q14. D'après la question 13, le spectre de φ_n est

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(\varphi_n) = \{k(k+1) \mid k \in [\![0, n]\!]\}}$$

Il y a donc $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ valeurs propres distinctes (raisonnement déjà tenu à la question 10), elles sont par conséquent toute de multiplicité 1 :

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad \dim E_{k(k+1)} = 1$$

Or, pour tout k, d'après 13, $L_k \in E_{k(k+1)}$ (et non nul). Donc

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!] \quad E_{k(k+1)} = \mathrm{Vect}\,(L_k)}$$

Partie III - Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

15) • Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$ existe car $t \mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur le segment $[-1, 1]$.
• Pour tout $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\langle(\lambda P+Q), R\rangle &= \int_{-1}^{1}(\lambda P+Q)(t)R(t)dt \\ &= \int_{-1}^{1}\lambda P(t)R(t)+Q(t)R(t)dt \\ &= \lambda\int_{-1}^{1}P(t)R(t)dt+\int_{-1}^{1}Q(t)R(t)dt \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \lambda\langle P, R\rangle+\langle Q, R\rangle,\end{aligned}$$

donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à gauche.
• Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$,

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1}P(t)Q(t)dt = \int_{-1}^{1}Q(t)P(t)dt = \langle Q, P\rangle,$$

donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique.
• $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique et linéaire à gauche, donc bilinéaire.
• Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\langle P, P\rangle = \int_{-1}^{1}(P(t))^2dt \geqslant 0$$

par positivité de l'intégrale (bornes dans le bon sens), donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est positif.
• Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\langle P, P\rangle = 0$.
Comme $t \mapsto P(t)^2$ est continue et positive sur $[-1, 1]$ et $-1 < 1$,

$$\langle P, P\rangle = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^{1}(P(t))^2dt = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [-1, 1],\ P(t) = 0.$$

Par suite, P a une infinité de racines, donc P est nul.
$\langle\cdot,\cdot\rangle$ est donc défini.
• $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est donc un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

16) Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$,

$$\langle\varphi(P), Q\rangle = \int_{-1}^{1}((t^2-1)P''(t)+2tP'(t))Q(t)dt.$$

Posons $u'(t) = (t^2-1)P''(t)+2tP'(t)$, $u(t) = (t^2-1)P'(t)$, $v(t) = Q(t)$, $v'(t) = Q'(t)$.
Comme u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1]$, on peut intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned}\langle\varphi(P), Q\rangle &= \int_{-1}^{1}((t^2-1)P''(t)+2tP'(t))Q(t)dt \\ &= \underbrace{\Big[(t^2-1)P'(t)Q(t)\Big]_{-1}^{1}}_{=0}-\int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)dt = -\int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)dt.\end{aligned}$$

Cette dernière écriture étant symétrique en P et Q, on obtient :

$$\forall(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle\varphi(P), Q\rangle = \langle\varphi(Q), P\rangle \underset{\text{par symétrie de } \langle\cdot,\cdot\rangle}{=} \langle P, \varphi(Q)\rangle.$$

17) Soit k et n deux entiers naturels distincts. On a :

$$\begin{aligned}
k(k+1)\langle L_k, L_n\rangle &= \langle k(k+1)L_k, L_n\rangle && \text{(linéarité à gauche)}\\
&= \langle \varphi(L_k), L_n\rangle && \text{(car } L_k \in E_{k(k+1)}(\varphi))\\
&= \langle L_k, \varphi(L_n)\rangle && \text{(d'après la question précédente)}\\
&= \langle L_k, n(n+1)L_n\rangle && \text{(car } L_n \in R_{n(n+1)}(\varphi))\\
&= n(n+1)\langle L_k, L_n\rangle && \text{(linéarité à droite),}
\end{aligned}$$

donc $(k(k+1)-n(n+1))\langle L_k, L_n\rangle = 0$, donc $\langle L_k, L_n\rangle = 0$, car, comme $(k(k+1))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite strictement croissante (cf. question 10), $k(k+1) \neq n(n+1)$.
La famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
Autre présentation de la preuve : φ est symétrique, donc si $\lambda \neq \mu$, alors $E_\lambda \perp E_\mu$. Puis reprendre la preuve ci-dessus.

18) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme $(L_0, \dots, L_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (cf. question 3), pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, il existe n réels $a_0, \cdots a_{n-1}$ tels que $P = \sum_{i=0}^{n-1} a_i L_i$. Par suite,

$$\begin{aligned}
\langle P, L_n\rangle &= \left\langle \sum_{i=0}^{n-1} a_i L_i, L_n \right\rangle\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \langle L_i, L_n\rangle && \text{(linéarité à gauche)}\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} 0 && \text{(car, pour tout } i \in [\![0, n-1]\!],\ i \neq n \text{ et d'après la question 17)}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

19) • Soit k et n deux entiers naturels distincts. On a :

$$\langle Q_k, Q_n\rangle = \sqrt{\frac{2k+1}{2}}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\langle L_k, L_n\rangle = 0,$$

donc la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
• De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|Q_n\| = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\|L_n\| = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\sqrt{\frac{2}{2n+1}} = 1,$$

donc $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
• De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, en posant $n = \deg(P)$, il existe $a_0, ..., a_n$ tels que

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i = \sum_{i=0}^{n} \left(a_i \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\right) Q_i$$

donc la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{R}[X]$.
Comme elle est de plus libre (car orthogonale), c'est une base de $\mathbb{R}[X]$.
• $\boxed{(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est donc une base orthonormale de } \mathbb{R}[X] \text{ pour le produit scalaire } \langle\cdot,\cdot\rangle.}$

20) Soit $n \in \mathbb{N}$.
• $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}[X]$.
Donc, d'après la caractérisation par la distance du projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $d(P, \mathbb{R}_n[X]) = \|P - T_n\|$ et T_n est le projeté orthogonal de P sur $\mathbb{R}_n[X]$.
• D'après le théorème de Pythagore,

$$\|P\|^2 = \|T_n\|^2 + \|P - T_n\|^2,$$

donc

$$\begin{aligned} d(P,\mathbb{R}_n[X])^2 &= \|P-T_n\|^2 \\ &= \|P\|^2-\|T_n\|^2 \\ &= \|P\|^2-\left\|\sum_{k=0}^{n}\langle P,Q_k\rangle Q_k\right\|^2 && \text{(projeté orthogonal dans une base orthonormée)} \\ &= \|P\|^2-\sum_{k=0}^{n}\langle P,Q_k\rangle^2 && \text{(car } (Q_k) \text{ est une famille orthonormale d'après Q19.)} \\ &= \|P\|^2-\sum_{k=0}^{n}(c_k(P))^2, && \text{où } c_k(P)=\langle P,Q_k\rangle. \end{aligned}$$

21) • On a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(c_k(P))^2=\|P\|^2-d(P,\mathbb{R}_n[X])^2\leqslant\|P\|^2$.

• De plus, la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n}(c_k(P))^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc elle converge (croissante et majorée par $\|P\|^2$).

• Par suite, la série $\sum(c_k(P))^2$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(c_k(P))^2\leqslant\|P\|^2$. *Je pense que la preuve ci-dessus est celle attendue, mais il y a plus simple et on aboutit en plus à un résultat plus précis...*
Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Posons $n=\deg(P)$.
Alors, pour tout $k>n$, $\langle P,Q_k\rangle=\sqrt{\dfrac{2k+1}{2}}\langle P,L_k\rangle=0$ (d'après la question 18)
D'où $\sum(c_k(P)^2$ converge (car $(c_k(P))^2$ est nul au-delà d'un certain rang) et

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(c_k(P))^2=\sum_{k=0}^{n}(c_k(P))^2=\sum_{k=0}^{n}\langle P,Q_k\rangle^2=\|P\|^2$$

car $(Q_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie IV - Fonction génératrice

Les racines du trinôme X^2-2X-1 sont

$$r_1=\frac{2+\sqrt{8}}{2}\qquad\text{et}\qquad r_2=\frac{2-\sqrt{8}}{2},$$

donc $r=r_1$ et on a $r>2$.

22) Soit $x\in[-1,1]$.
Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_n:\quad |L_n(x)|\leqslant r^n$$

est vraie pour tout $n\geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: $L_0=1$ et $r^0=1$, donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.
- $\underline{\mathcal{H}_1}$: Comme $r>2$, $|L_1(x)|=|x|\leqslant 1\leqslant r^1$. Donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.

- $\underline{\mathcal{H}_{n-1},\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}}$: Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\mathcal{H}_n$ **et** $\mathcal{H}_{n-1}$ vraies.

$$\begin{aligned}
|L_{n+1}(x)| &= \left|\frac{(2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)}{n+1}\right| && \text{(d'après la relation admise)}\\
&\leqslant \frac{(2n+1)|x|\cdot|L_n(x)| + n|L_{n-1}(x)|}{n+1} && \text{(inégalité triangulaire)}\\
&\leqslant \frac{(2n+1)r^n + nr^{n-1}}{n+1} && \text{(car } |x| \leqslant 1 \text{ et d'après } \mathcal{H}_n \text{ et } \mathcal{H}_{n-1})\\
&= \frac{2n+1}{n+1}r^n + \frac{n}{n+1}r^{n-1} \leqslant 2r^n + r^{n-1}\\
&= r^{n-1}(2r+1) = r^{n-1}r^2 && \text{(car } r^2 - 2r - 1 = 0)\\
&= r^{n+1}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad |L_n(x)| \leqslant r^n}$

23) Soit $x \in [-1,1]$. Pour tout $t \in \left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[$,

$$|L_n(x)t^n| \leqslant r^n t^n = (rt)^n.$$

Or, $rt \in [0,1[$, donc la série géométrique $\sum\limits_{n\geqslant 0}(rt)^n$ converge, donc, par comparaison, $\sum\limits_{n\geqslant 0}|L_n(x)t^n|$ converge, donc $\sum\limits_{n\geqslant 0} L_n(x)t^n$ converge absolument, donc t est dans le disque ouvert de convergence.

Par suite, $\left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[$ est inclus dans le disque ouvert de convergence, donc $R(x) \geqslant \frac{1}{r}$.

24) $S_x : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son disque ouvert de convergence, donc en particulier sur $\left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[$.

De plus, pour tout $t \in \left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[$, par dérivation terme à terme à l'intérieur du domaine de convergence,

$$S_x'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} nL_n(x)t^{n-1}$$

donc

$$\begin{aligned}
(1-2tx+t^2)S_x'(t) + (t-x)S_x(t) &= (1-2tx+t^2)\sum_{n=1}^{+\infty} nL_n(x)t^{n-1} + (t-x)\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} nL_n(x)t^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} 2nxL_n(x)t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} nL_n(x)t^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} xL_n(x)t^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)L_{n+1}(x)t^n - \sum_{n=1}^{+\infty} 2nxL_n(x)t^n + \sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)L_{n-1}(x)t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} L_{n-1}(x)t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} xL_n(x)t^n\\
&= \left(L_1(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)L_{n+1}(x)t^n\right) - \sum_{n=1}^{+\infty} 2nxL_n(x)t^n + \left(\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)L_{n-1}(x)t^n - 0\right)\\
&\quad + \sum_{n=1}^{+\infty} L_{n-1}(x)t^n - \left(xL_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} xL_n(x)t^n\right)\\
&= L_1(x) - xL_0(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)L_{n+1}(x) - 2nxL_n(x) + (n-1)L_{n-1}(x) + L_{n-1}(x) - xL_n(x)\right)t^n\\
&= x - x + \sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\left((n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1)xL_n(x) + nL_{n-1}(x)\right)}_{=0 \text{ d'après la relation vérifiée par } L_n} t^n\\
&= 0,
\end{aligned}$$

donc S_x vérifie bien l'équation différentielle : $(1-2tx+t^2)y'+(t-x)y=0$.

25) • Pour tout $x\in[-1,1]$, pour tout $t\in\left]-\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right[$,

$$|2xt|\leqslant 2\frac{1}{r}\times 1=\frac{2}{r}\underset{\text{car } r>2}{<}1\leqslant 1+t^2,$$

donc $1-2tx+t^2>0$.
Par suite,

$$(1-2tx+t^2)y'+(t-x)y=0 \Leftrightarrow y'+\frac{t-x}{1-2tx+t^2}y=0.$$

Une primitive de $t\mapsto \dfrac{t-x}{1-2tx+t^2}$ est $t\mapsto \dfrac{1}{2}\ln(1-2tx+t^2)$ (car $1-2tx+t^2>0$).
Les solutions de l'équation homogène $(1-2tx+t^2)y'+(t-x)y=0$ sont donc de la forme :

$$t\mapsto C\exp\left(-\frac{1}{2}\ln(1-2tx+t^2)\right)=\frac{C}{\sqrt{1-2tx+t^2}}.$$

• S_x est une solution de $(1-2tx+t^2)y'+(t-x)y=0$ sur $\left]-\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right[$, donc il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t\in\left]-\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right[,\quad S_x(t)=\frac{C}{\sqrt{1-2tx+t^2}}.$$

Enfin, $S_x(0)=L_0=1$, donc $\dfrac{C}{\sqrt{1}}=1\Leftrightarrow C=1$.
• On a donc bien,

$$\forall x\in[-1,1],\ \forall t\in\left]-\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right[,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}L_n(x)t^n=\frac{1}{\sqrt{t^2-2xt+1}}.$$

26) • En prenant $t=0\in\left]-\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right[$ dans l'égalité obtenue en 25, on obtient

$$\forall x\in[-1,1],\quad L_0(x)=1,$$

donc L_0-1 a une infinité de racines (tous les éléments de $[-1,1]$), donc $L_0-1=0$, donc $L_0=1$.
• En dérivant la relation obtenue en 25, on obtient :

$$\forall x\in[-1,1],\ \forall t\in\left]-\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right[,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}nL_n(x)t^{n-1}=-\frac{2(t-x)}{2(t^2-2xt+1)\sqrt{t^2-2xt+1}}.$$

En prenant $t=0\in\left]-\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right[$, on obtient

$$L_1(x)=-\frac{-2x}{2}=x,$$

donc le polynôme L_1-X a une infinité de racines (les éléments de $[-1,1]$), donc $L_1-X=0$, donc $L_1=X$.
• En dérivant une seconde fois, on obtient :

$$\forall x\in[-1,1],\ \forall t\in\left]-\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right[,\quad \sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)L_n(x)t^{n-2}=\ldots\quad\text{(calcul inutile, on veut juste l'idée)}$$

En prenant $t=0\in\left]-\frac{1}{r},\frac{1}{r}\right[$, on va obtenir

$$2L_2(x)=3x^2-1\text{(vu ce que l'on a obtenu en question 1)},$$

donc le polynôme $2L_2-3X^2+1$ a une infinité de racines (les éléments de $[-1,1]$), donc $2L_2-3X^2+1=0$, donc $L_2=\dfrac{1}{2}(3X^2-1)$.

Partie V - Expression intégrale des polynômes de Legendre

27) Soit $n \in \mathbb{N}$. *Un module se calcule au carré, puis on prend la racine.*

$$\forall \theta \in [-\pi, \pi] \qquad |v_n(\theta)|^2 = t^{2n}(\cos^2\theta + \sin^2\theta\cos^2 u)^n \leqslant t^{2n}(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^n = t^{2n}$$

Par conséquent, $\forall \theta \in [-\pi, \pi]$, $|v_n(\theta)| \leqslant |t|^n$, et en passant au sup pour $\theta \in [-\pi, \pi]$,

$$\|v_n\|_\infty \leqslant |t|^n$$

Or, comme $|t| < 1$, la série géométrique $\sum |t|^n$ converge. Donc, par majoration, $\sum \|v_n\|_\infty$ converge.
Conclusion :

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge normalement sur } [-\pi, \pi]}$$

28) *On vous demande de déterminer la somme d'une série, sans plus d'indication : elle donc … soit géométrique, soit télescopique.*
Soit $t \in]-1, 1[$ et $u \in [-\pi, \pi]$ fixés. $\sum v_n$ converge normalement donc simplement sur $[-\pi, \pi]$.
Soit $q = t(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\cos u)$. Comme $|q| \leqslant |t| < 1$ d'après ci-dessus, on a

$$S(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 - t(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\cos u)}$$

donc finalement,

$$\forall u \in [-\pi, \pi] \qquad S(u) = \frac{1}{1 - t(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\cos u)}$$

Théorème d'intégration terme à terme :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est continue sur $[-\pi, \pi]$;
- $\sum v_n$ converge normalement donc uniformément vers S sur $[-\pi, \pi]$ d'après la question 1.

Alors, d'après le théorème d'intégration terme à terme, la série $\sum \int_{-\pi}^{\pi} v_n(u)\,\mathrm{d}u$ converge et

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(u)\,\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} v_n(u)\,\mathrm{d}u$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\theta)t^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v_n(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(u)\,\mathrm{d}u && \text{Par intégration terme à terme} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1 - t(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\cos u)}
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall t \in]-1, 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\theta)t^n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1 - t\cos\theta - \mathrm{i}t\sin\theta\cos u}}$$

29) Effectuons le changement de variable $v = \pi - u$ *(c'est un intégrale sur un segment, pas besoin de prendre des gants et un théorème).*

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{\cos u}{1+a^2\cos^2 u}\,\mathrm{d}u &= \int_\pi^0 \frac{\cos(\pi - v)}{1+a^2\cos^2(\pi - v)}(-1)\,\mathrm{d}v\\ &= \int_0^\pi \frac{-\cos v}{1+a^2\cos^2 v}\,\mathrm{d}v\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\int_0^\pi \frac{\cos u}{1+a^2\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = 0}$$

30) Posons $u = \operatorname{Arctan} v$. La fonction Arctan est $\mathscr{C}^1$, strictement croissante et bijective de $[0, +\infty[$ vers $[0, \pi/2[$. De plus

$$\frac{1}{\cos^2 u} = 1 + \tan^2 u = 1 + v^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2}$$

Donc, d'après le théorème de changement de variable, les deux intégrales sont de même nature – donc convergentes ici – et

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{1+a^2\ \cos^2 u} &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{a^2}{1+v^2}}\frac{\mathrm{d}v}{1+v^2}\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+v^2+a^2}\,\mathrm{d}v\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}}{1+\left(\frac{v}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}v\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{v}{\sqrt{1+a^2}}\right)\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{1+a^2\ \cos^2 u} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}}$$

31) Préliminaire : comme $\cos(\pi - u) = -\cos(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1+a^2\cos^2 u}\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+a^2\cos^2 u}\mathrm{d}u$ et

$$\int_0^\pi \frac{1}{1+a^2\cos^2 u}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+a^2\cos^2 u}\,\mathrm{d}u$$

Puis

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} S(u)\,\mathrm{d}u &= 2\int_0^\pi S(u)\,\mathrm{d}u && \text{car } S \text{ est paire}\\ &= 2\int_0^\pi \frac{1 - t\cos\theta + it\sin\theta\cos u}{(1-t\cos\theta)^2 + t^2\sin^2\theta\cos^2 u}\,\mathrm{d}u && \text{produit par la quantité conjuguée}\\ &= \frac{2}{1-t\cos\theta}\int_0^\pi \frac{1}{1+a^2\cos^2 u}\,\mathrm{d}u + \frac{2it\sin\theta}{(1-t\cos\theta)^2}\int_0^\pi \frac{\cos u}{1+a^2\cos^2 u}\,\mathrm{d}u\\ & && \text{avec } a = \left|\frac{t\sin\theta}{1-t\cos\theta}\right| > 0\\ &= \frac{2}{1-t\cos\theta}\times\frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{2it\sin\theta}{(1-t\cos\theta)^2}\times 0 && \text{d'après les questions 29 et 30}\\ &= \frac{2}{1-t\cos\theta}\times\frac{\pi}{\sqrt{1+\left(\frac{t\sin\theta}{1-t\cos\theta}\right)^2}}\\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{1-2t\cos\theta + t^2\cos^2\theta + t^2\sin^2\theta}}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in \left]-1,1\right[, \quad \forall \theta \in [0,\pi], \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}u}{1 - t\cos\theta - it\sin\theta\cos u} = \frac{2\pi}{\sqrt{t^2 - 2t\cos\theta + 1}}}$$

32) Soit $\theta \in [0,\pi]$.

$x = \cos(\theta) \in [-1,1]$, donc, pour tout $t \in \left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} L(\cos\theta)t^n = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2t\cos\theta + 1}}$ d'après la question 25.

D'après les questions 28 et 31, pour tout $t \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\theta)t^n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{du}{1 - t\cos\theta - it\sin\theta\cos u} = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2t\cos\theta + 1}}.$$

• D'où, par unicité du développement en série entière de $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2 - 2t\cos\theta + 1}}$ sur $\left]-\frac{1}{r}, \frac{1}{r}\right[\subset]-1,1[$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n(\cos\theta) = w_n(\theta).$$

33) Par suite, pour tout $x \in [-1,1]$, en posant $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\cos\theta = x$, on a, pour tout $t \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{t^2 - 2xt + 1}} &= \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2t\cos\theta + 1}} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} w_n(\theta)t^n \quad \text{(d'après les question 31 et 28)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} L(\cos\theta)t^n \quad \text{(d'après la question 32)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n \quad \text{(par définition de } \theta\text{)}.
\end{aligned}$$

34) • D'après la question précédente, on a $R(x) \geqslant 1$.

• Supposons $R(x) > 1$.

Le rayon de convergence de $z \in \mathbb{C} \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)z^n$ est $R(x) > 1$.

Le rayon de convergence de $z \in \mathbb{C} \mapsto z^2 - 2xz + 1$ est $+\infty$ (c'est un polynôme, que l'on voit comme une série entière).

Par produit de Cauchy de séries entières, $z \mapsto (z^2 - 2tz + 1)\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)z^n\right)^2$ est une série entière de rayon de convergence $\geqslant R(x)$, donc il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ (comme somme et produit de nombres réels dans le produit de Cauchy) telle que,

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| < R(x), \quad (z^2 - 2xz + 1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)z^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

En particulier, pour tout $t \in]-R(x), R(x)[$, $(t^2 - 2xt + 1)\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n\right)^2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$.

Or, pour tout $t \in]-1,1[$, $(t^2 - 2xt + 1)\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n\right)^2 = 1$ d'après la question précédente.

Or 1 est son propre développement en série entière, de rayon de convergence $+\infty$, donc, par unicité du développement en série entière sur $]-1,1[$ de $t \mapsto (t^2 - 2xt + 1)\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n\right)^2$, on a

$$b_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant 1,\ b_n = 0.$$

On a donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R(x)$, $(z^2 - 2xz + 1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x) z^n\right)^2 = 1$.
Or, en posant $x = \cos\theta$ (possible car $x \in [-1, 1]$), $z^2 - 2xz + 1 = 0$ a pour solutions :

$$z_1 = \frac{2\cos\theta + 2i\sin\theta}{2} = e^{i\theta} \qquad \text{et} \qquad z_2 = e^{-i\theta} \quad (\text{car } \Delta = 4\cos^2(\theta) - 4 = (2i\sin\theta)).$$

Par suite, pour $z = e^{i\theta}$, on a $|z| < R(x)$ (car on a supposé $R(x) > 1$) et $\underbrace{(z^2 - 2xz + 1)}_{=0}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} L_n(x) z^n\right)^2 = 0$.

C'est exclu, donc, par l'absurde, $R(x) \leqslant 1$.
• On a donc $R(x) \leqslant 1$ et $R(x) \geqslant 1$, donc $R(x) = 1$.

Partie VI - Application à l'approximation d'intégrales

35) Montrons par récurrence que, pour tout $n \geqslant 2$ "si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe n réels $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ tels que $\forall i \in [\![1, n]\!], h(\alpha_i) = 0$, alors il existe un réel c tel que $f^{(n-1)}(c) = 0$" (HR_n)
Initialisation Pour $n = 2$, f est supposée continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[\alpha_1, \alpha_2]$. En appliquant le théorème de Rolle, on obtient l'existence de $c \in]\alpha_1, \alpha_2[\subset \mathbb{R}$ tel que $f^{(1)}(c) = 0$. On a donc bien HR_2.
Hérédité : Soit $n \geqslant 2$ et supposons HR_n vérifée.
Soit alors une fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et $\alpha_1 < ... < \alpha_{n+1}$ $n+1$ réels distincts en lesquels f s'annule.
Alors, en appliquant le théorème de Rolle à f sur chaque intervalle $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, on obtient l'existence de n réels distincts $\beta_1 < \cdots < \beta_n$ en lesquels f' s'annulle, avec f' fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$.
En appliquant HR_n à f', on obtient l'existence d'un $c \in \mathbb{R}$ tel que $(f')^{(n-1)}(c) = 0$, et donc $f^{(n)}(c) = 0$.
On a bien HR_{n+1}.
Conclusion : La propriété est donc établie par récurrence.
Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2n \geqslant 2$, donc on a HR_{2n}, qui n'est autre que la propriété à démontrer.

36) Soit $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$.
Si $\sum_{i=1}^{n} a_i \ell_i = 0$, alors, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\sum_{i=1}^{n} a_i \ell_i(P) = 0$.
Soit, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $P_j = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} (X - x_i) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ell_i(P_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{P_j(x_i)}_{=0 \text{ si } i \neq j} = a_j P_j(x_j),$$

donc, comme $\sum_{i=1}^{n} a_i \ell_i(P) = 0$, on a $a_j P_j(x_j) = 0$, donc $a_j = 0$ car $P_j(x_j) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \underbrace{(x_j - x_i)}_{\neq 0} \neq 0$ (car les x_i sont deux à deux distincts).
Ceci étant valable pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a bien la liberté.

37) La famille $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ est donc libre.
De plus, elle est formée de n éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$, espace vectoriel de dimension n, donc c'est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R})$.
Par suite, pour toute application linéaire ψ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}$, il existe un unique n-uplet $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ de réels tel que : $\psi = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \ell_k$.

38) $\varphi : P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)dt$ est une application linéaire (par linéarité de l'intégrale) de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}$.
Donc, d'après la question précédente, il existe un unique n-uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de réels tel que $\varphi = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \ell_k$, ie

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_{-1}^{1} P(t)dt = \varphi(P) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \ell_k(P) = \alpha_1 P(x_1) + \cdots + \alpha_n P(x_n).$$

39) • Pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, il existe un unique couple (Q, R) avec $\deg(R) < \deg(L_n) = n$ tel que $P = QL_n + R$.
De plus, comme $QL_n = P - R$ où $\deg(L_n) = n$ et $\deg(P - R) \leqslant 2n - 1$, on a $\deg(Q) \leqslant n - 1$, donc $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Alors, en reprenant le n-uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ trouvé à la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} P(t)dt &= \int_{-1}^{1} Q(t)L_n(t)dt + \int_{-1}^{1} R(t)dt \\
&= \langle Q, L_n \rangle + \int_{-1}^{1} R(t)dt \quad \text{(par définition du produit scalaire introduit en partie III)} \\
&= 0 + \int_{-1}^{1} R(t)dt \quad \text{(d'après la question 18 avec } Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\text{)} \\
&= \alpha_1 R(x_1) + \cdots + \alpha_n R(x_n) \quad \text{(car } R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\text{)}
\end{aligned}$$

et, comme pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(x_i) = Q(x_i) \underbrace{L_n(x_i)}_{=0} + R(x_i) = R(x_i)$, on a bien

$$\int_{-1}^{1} P(t)dt = \alpha_1 R(x_1) + \cdots + \alpha_n R(x_n) = \alpha_1 P(x_1) + \cdots + \alpha_n P(x_n).$$

40) • Soit $\varphi : P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X] \mapsto (P(x_1, \dots, P(x_n), P'(x_1), \dots, P'(x_n))$.
C'est une application linéaire (dit dans l'énoncé).
Soit $P \in \mathrm{Ker}\,(\varphi)$. Alors, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(x_i) = P'(x_i) = 0$, donc x_i est une racine au moins double de P.
Comptées avec multiplicité, P admet donc au moins $2n$ racines, donc, comme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on a $P = 0$.
φ est donc injective.
• D'après le théorème du rang, on a alors

$$\dim \mathrm{Im}\ \varphi = \dim \mathbb{R}_{2n-1}[X] - \dim \mathrm{Ker}\ \varphi = 2n = \dim \mathbb{R}^{2n}$$

et $\mathrm{Im}\ \varphi \subset \mathbb{R}^{2n}$, donc $\mathrm{Im}\ \varphi = \mathbb{R}^{2n}$ et φ est donc surjective.
• φ est injective et surjective, donc bijective.
• Par suite, pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$,

$$\begin{aligned}
\left(\forall i \in [\![1, n]\!], \ \begin{cases} P(x_i) = f(x_i) \\ P'(x_i) = f'(x_i) \end{cases} . \right) &\Leftrightarrow \varphi(P) = (f(x_1), \dots, f(x_n), f'(x_1), \dots, f'(x_n)) \\
&\Leftrightarrow P = \varphi^{-1}(f(x_1), \dots, f(x_n), f'(x_1), \dots, f'(x_n)),
\end{aligned}$$

ce qui assure l'existence et l'unicité de H_n.

41) Soit $x \in [-1, 1]$ tel que : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x \neq x_i$.
Soit $g : t \in [-1, 1] \mapsto f(t) - H_n(t) - \dfrac{A_n(t)^2}{(2n)!} \times \underbrace{\dfrac{(2n)!}{A_n(x)^2}(f(x) - H_n(x))}_{=K}$.

g est bien définie car $A_n(x) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \underbrace{(x - x_i)}_{\neq 0} \neq 0$.

On renumérote $(x_1,\dots,x_n,x)$ en $(y_1,\dots,y_{n+1})$ de telle sorte que $y_1<\dots<y_{n+1}$.
Alors, comme

- $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $g(x_i)=\underbrace{f(x_i)-H_n(x_i)}_{=0}-\dfrac{\overbrace{A_n(x_i)^2}^{=0}}{(2n)!}\times K=0$
- et $g(x)=f(x)-H_n(x)-\dfrac{A_n(x)^2}{(2n)!}\times\dfrac{(2n)!}{A_n(x)^2}(f(x)-H_n(x))=0$,

on a $g(y_i)=0$ pour tout $i\in[\![1,n+1]\!]$.
g est de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur $[-1,1]$, donc, comme $n\geqslant 1$, g est continue et dérivable sur $[-1,1]$, donc sur $[y_i,y_{i+1}]$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.
D'après le théorème de Rolle, appliqué sur chaque intervalle, il existe n réels $\beta_1,\dots,\beta_n$ tels que

$$y_1<\beta_1<y_2<\ldots<\beta_n<y_{n+1}\qquad\text{et}\qquad g'(\beta_i)\text{ pour tout }i\in[\![1,n]\!].$$

Par construction, la famille $\beta_1,\dots,\beta_n,x_1,\dots,x_n)$ est formée de $2n$ éléments de $[-1,1]$ deux à deux distincts.
De plus, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$,

- $g'(\beta_i)=0$
- et $g'(x_i)=\underbrace{f'(x_i)-H_n'(x_i)}_{=0}-\dfrac{2A_n'(x_i)\overbrace{A_n(x_i)}^{=0}}{(2n)!}K=0$,

donc g' s'annule (au moins) $2n$ fois sur $[-1,1]$ et, comme

- f' est de classe $\mathcal{C}^{2n-1}$ sur $[-1,1]$ (car f est de classe $\mathcal{C}^{2n}$)
- et H_n' A_n et A_n' sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ (ce sont des fonctions polynomiales),

g' est de classe $\mathcal{C}^{2n-1}$ sur $[-1,1]$.
D'où, d'après la question 35, adaptée sans difficulté à une fonction de $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, il existe $c\in[-1,1]$ tel que $(g')^{(2n-1)}(c)=0\Leftrightarrow g^{(2n)}(c)=0$.
Or, $g^{(2n)}=f^{(2n)}-H_n^{(2n)}-\dfrac{(A_n^2)^{(2n)}}{(2n)!}K$, où

- $H_n^{(2n)}=0$ car $H_n\in\mathbb{R}_{2n-1}[X]$
- et $(A_n^2)^{(2n)}\in\mathbb{R}_0[X]$ (car $\deg(A_n^2)=2n$), et une récurrence similaire à celle de la question 2, poussée jusqu'à $k=2n$, donne $A_n^{(2n)}=(2n)!$,

donc $g^{(2n)}(c)=f^{(2n)}(c)-K$, et donc

$$K=f^{(2n)}(c)\Leftrightarrow\frac{(2n)!}{A_n(x)^2}(f(x)-H_n(x))=f^{(2n)}(c)\Leftrightarrow f(x)=H_n(x)+\frac{A_n(x)^2}{(2n)!}f^{(2n)}(c).$$

42) Pour tout $y\in[-1,1]$,

- si $y\neq x_i$, alors c existe d'après la question précédente
- si $y=x_i$, alors $f(y)-H_n(y)=0$ et $A_n(y)=0$, donc c quelconque dans $[1,1]$ convient.

43) • $f^{(2n)}$ est continue sur le segment $[-1,1]$, donc elle est bornée et atteint ses bornes sur $[-1,1]$, donc $M_{2n}(f)=\max\limits_{t\in[-1,1]}|f^{(2n)}(t)|$ existe.
• Reprenons H_n comme à la question 40. Alors

$$\begin{aligned}\left|\int_{-1}^1 f(t)dt-(\alpha_i f(x_1)+\dots+\alpha_n f(x_n))\right|&=\left|\int_{-1}^1 f(t)dt-\int_{-1}^1 H_n(t)dt\right|\quad\text{(d'après la question 39 avec }H_n\in\mathbb{R}_{2n\text{-}}\\&=\left|\int_{-1}^1 f(t)-H_n(t)dt\right|\end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in [-1,1]$, il existe $c_t \in [-1,1]$ tel que

$$|f(t) - H_n(t)| = \left| \frac{A_n(t)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(c_t) \right| \leqslant \frac{A_n(t)^2}{(2n)!} \times M_{2n}(f),$$

donc, par positivité de l'intégrale (avec $-1 \leqslant 1$),

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^{1} f(t)dt - (\alpha_i f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)) \right| &= \left| \int_{-1}^{1} f(t) - H_n(t) dt \right| \\ &\leqslant \int_{-1}^{1} \frac{A_n(t)^2}{(2n)!} M_{2n}(f) dt = \frac{M_{2n}(f)}{(2n)!} \int_{-1}^{1} A_n(t)^2 dt. \end{aligned}$$

44) Par définition de A_n,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} A_n(t)^2 dt &= \frac{1}{a_n^2} \langle L_n, L_n \rangle = \frac{1}{a_n^2} \frac{2}{2n+1} \quad \text{(admis en question 9)} \\ &= 2^{2n} \frac{(n!)^4}{((2n)!)^2} \frac{2}{2n+1} \sim 2^{2n} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^{4n} \sqrt{2\pi n}^4}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{4n} \sqrt{2\pi 2n}^2} \frac{1}{n} \quad \left(\text{Stirling : } n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right) \\ &= 2^{2n} \frac{4\pi^2 n^2}{2^{4n} 4\pi n} \frac{1}{n} = \frac{\pi}{4^n}. \end{aligned}$$