Lycée St Joseph
Classe de PC

Pour le vendredi 9 février 2018

Devoir de Mathématiques numéro 6

Correction

Exercice 1 (CCP 2010 TSI, partiel)

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \geqslant 0$. Somme des termes d'une série géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} (-t)^k = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1-(-t)} = \frac{1}{1+t} - (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}}{1+t}$$

Par conséquent, en multipliant par $e^{-\frac{t}{x}}$,

$$\boxed{\frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k e^{-\frac{t}{x}} + (-1)^{n+1}\frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}}$$

2) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Les fonctions $t \mapsto t^k e^{-\frac{t}{x}}$ et $t \mapsto \dfrac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$ sont continues sur $[0, +\infty[$ et par croissance comparée,

$$\lim_{t\to+\infty} t^{k+2}e^{-\frac{t}{x}} = 0 \qquad \text{et} \qquad t^2\frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} \sim \frac{t^{n+3}e^{-\frac{t}{x}}}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

Donc ces deux fonctions sont des petits o de $1/t^2$ en $+\infty$, or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc par comparaison elles sont intégrables au voisinage de $+\infty$.

Ainsi, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t \text{ existent}}$

Nous pouvons donc intégrer l'égalité obtenue au 1). La somme est *finie* donc par linéarité

$$\boxed{\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1}\int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t}$$

3) **a)** $I_0(x) = \left[\dfrac{e^{-t/x}}{-1/x}\right]_0^{+\infty} = x.$

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. On effectue une intégration par partie. Soit $u = \dfrac{t^{k+1}}{k+1}$ et $v = e^{-t/x}$. Comme $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} uv = 0$ par croissance comparée, on peut écrire

$$I_k(x) = [uv]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{t^{k+1}}{k+1}(-1/x)e^{-t/x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x(k+1)} I_{k+1}(x)$$

Conclusion : $\boxed{I_{k+1}(x) = (k+1)xI_k(x)}$

c) Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{H}_k : \quad I_k(x) = k!x^{k+1}$$

est vraie pour tout $k \geqslant 0$.

- $\underline{\mathcal{H}_0}$: est vraie d'après a).
- $\underline{\mathcal{H}_k \Longrightarrow \mathcal{H}_{k+1}}$: Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie. $I_{k+1}(x) \overset{\text{b)}}{=} (k+1)xI_k(x) = (k+1)xk!x^{k+1} = (k+1)!x^{k+2}$. Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
- <u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall k \geqslant 0 \qquad I_k(x) = k!x^{k+1}}$

Vous devriez savoir faire le calcul de $I_k(x)$ sans aucune question intermédiaire : c'est un classique.

4) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 2) puis 3)c),

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_k(x) + (-1)^{n+1}\int_0^{+\infty}\frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!x^{k+1} + (-1)^{n+1}\int_0^{+\infty}\frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Donc $R_n(x) = (-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$|R_n(x)| \leqslant \int_0^{+\infty}\left|\frac{t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\right|\mathrm{d}t$$

Or $0 < \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$ sur $[0, +\infty[$, ce qui entraine,

$$|R_n(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t = I_{n+1}(x) = (n+1)!x^{n+2}$$

Ainsi, $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ |R_n(x)| \leqslant (n+1)!x^{n+2}}$

b) $u_n \neq 0$ donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)!10^{n+2}}{10^{n+3}(n+1)!} = \frac{n+2}{10}$$

Donc pour tout $n \in \{0, \ldots, 8\}$, $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ et la suite est décroissante ($u_n > 0$). Pour $n \geqslant 8$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ et la suite devient croissante.

Donc $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est minimale pour } n = 8}$ et $\boxed{u_8 \simeq 3.63 \times 10^{-5}}$

c) $\varphi\left(\dfrac{1}{10}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{8}(-1)^k I_k(1/10) + R_8(1/10)$, et d'après b) $|R_8(1/10)| \leqslant 4 \times 10^{-5}$.

Donc on peut obtenir $\varphi\left(\dfrac{1}{10}\right)$ avec 4 chiffres significatifs en calculant $\displaystyle\sum_{k=0}^{8}(-1)^k I_k(1/10)$.

5) Soit $z \neq 0$ et $v_k = (-1)^k k!z^{k+1}$.

$$\left|\frac{v_{k+1}}{v_k}\right| = (k+1)|z| \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty > 1$$

Donc, d'après le critère de D'Alembert, $\sum |v_k|$ diverge grossièrement, donc $\sum v_k$ aussi.

Ainsi, $\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } \displaystyle\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k k!z^{k+1} \text{ est } 0}$

En particulier cette série n'est pas convergente pour $z = \dfrac{1}{10}$.

On vient d'utiliser une série divergente (et pas qu'un peu divergente) pour approximer $\varphi(1/10)$....

Exercice 2 (E3A PC 2016)

1) Rayon de convergence : 1.

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

2) Pour $x = -\dfrac{1}{2}$, on a donc

$$\ln\Big(1 - \frac{1}{2}\Big) = \ln\Big(\frac{1}{2}\Big) = -\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n$$

D'où

$$\boxed{\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}}$$

3) **a)** Pour tout $k \geqslant 1$, posons $u_k = \dfrac{x^{k+1}}{k(k+1)}$. Pour tout $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| &= \left|\frac{x^{k+2}k(k+1)}{(k+1)(k+2)x^{k+1}}\right| \\ &= \frac{k}{k+2}|x| \\ &\sim \frac{k}{k}|x| \xrightarrow[k\to+\infty]{} |x| \end{aligned}$$

Donc, d'après D'Alembert,

- si $|x| < 1$, $\sum u_k$ converge absolument,
- si $|x| > 1$, $\sum |u_k|$ diverge grossièrement, donc $\sum u_k$ diverge.

Ainsi,

$$\boxed{R = 1}$$

Pour tout $x \in]-1,1[$, posons $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}$. La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ à l'intérieur du domaine de convergence.

En dérivant terme à terme f à l'intérieur du domaine de convergence, il vient

$$\forall x \in]-1,1[\qquad f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

Donc en primitivant, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = -\displaystyle\int_0^x \ln(1-t)\,\mathrm{d}t = (1-x)\ln(1-x) - 1 + x + K$.

Comme $f(0) = 0$, $-1 + K = 0$.

D'une part, on vérifie toujours ses primitives en dérivant : on peut conjecturer la primitive de $\ln(1-x)$*, et vérifier qu'elle convient. D'autre part, une égalité entre primitives est toujours à une constante près.*

Conclusion :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} = (1-x)\ln(1-x) + x}$$

b) En $x = \dfrac{1}{2} \in]-1,1[$,

$$f\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}k(k+1)} = \frac{\ln(1/2)}{2} + \frac{1}{2}$$

D'où, en multipliant par 2,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k} = 1 - \ln(2)}$$

4) **a)** Soit $a_k = \dfrac{1}{k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

La série $\sum (-1)^k a_k$ est alternée car $a_k > 0$, et vérifie les hypothèses du critère des séries alternées :

- $\sum a_k$ alternée,
- (a_k) décroissante, car $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ l'est sur $[1, +\infty[$,
- $\lim\limits_{k \to +\infty} a_k = 0$.

Donc $\boxed{\text{La série } \sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} \text{ est convergente}}$

b) Soit $x \in [0,1]$. La série $\sum \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ vérifie elle aussi le critère des séries alternée, donc converge. De plus le reste d'ordre est donc majoré par le premier terme, le tout en valeur absolue : pour $n \in \mathbb{N}$,

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leqslant \left| \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} |x|^{n+1}$$

Or $|x| \leqslant 1$, donc

$$\boxed{\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leqslant \frac{1}{n+1}}$$

c) Pour $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Soit $u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ pour tout $x \in [0,1]$.

D'après la question 4)a), $\sum u_n$ converge simplement, et

$$\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \|_\infty \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \|R_n\|_\infty = 0$: la série $\sum u_n$ converge uniformément sur l'intervalle $[0,1]$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est continue sur $[0,1]$ car polynomiale.

Donc, d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k$ est continue sur $[0,1]$. En particulier,

$$\lim_{x \to 1} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(1)$$

Or, comme nous l'avons rappelé en 1), $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = \ln(1+x)$ pour tout $x \in]-1,1[$. Donc, comme ln est continue en 2 (égalité de gauche),

$$\boxed{\ln(2) = \lim_{x \to 1} \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}}$$