

Devoir de Mathématiques numéro 6

Exercice 1

Notons

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \geqslant 0$, on a

$$\frac{e^{-\frac{t}{x}}}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k e^{-\frac{t}{x}} + (-1)^{n+1} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}$$

2) Justifier, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
En déduire que

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1} e^{-\frac{t}{x}}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

3) On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $I_k(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-\frac{t}{x}}\,\mathrm{d}t$

a) Calculer $I_0(x)$.

b) Donner pour $k \in \mathbb{N}$ une relation entre $I_{k+1}(x)$ et $I_k(x)$.

c) En déduire que $I_k(x) = k! x^{k+1}$.

4) On pose désormais, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_n(x) = \varphi(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k! x^{k+1}$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n(x)| \leqslant (n+1)! x^{n+2}$.

b) On suppose désormais que $x = \dfrac{1}{10}$, et on pose $u_n = (n+1)!(1/10)^{n+2}$. En étudiant le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, montrer que la suite (u_n) est minimale pour $n = 8$.

c) À quelle précision peut-on obtenir une valeur de $\varphi\left(\dfrac{1}{10}\right)$, à l'aide des questions précédentes ?

5) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} (-1)^k k! z^{k+1}$? Cette série est-elle convergente pour $z = \dfrac{1}{10}$?

Cet exercice est une illustration de la citation suivante de Henri Poincaré :
« Il y a entre les géomètres[1] *et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot convergence. Les géomètres préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les 20 premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment. »*

1. L'analyse est à cette époque considérée comme une partie de la géométrie.

Exercice 2

1) Rappeler, en précisant le rayon de convergence, le développement en série entière de la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $x \mapsto \ln(1+x)$.

2) Montrer alors que $\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$.

3) **a)** Donner le rayon de convergence puis calculer la somme de la série entière $\sum_{k \geqslant 1} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)}$.

b) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)2^k}$.

4) **a)** Montrer que la série $\sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ est convergente.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leqslant \frac{1}{n+1}$.

c) En déduire que $\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$