Devoir de Mathématiques numéro 5

Exercice 1

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3 .
Les résultats suivants sont admis :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n \qquad \text{et} \qquad B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$$

Un fabriquant de tablettes de chocolat propose à ses acheteurs de collectionner des vignettes. Chaque tablette contient une vignette qui représente un animal que l'on découvre à l'ouverture de la tablette. Le nombre d'animaux différents représentés sur les vignettes est égal à n et on suppose que ces animaux sont répartis de façon équiprobable entre les tablettes.
Un collectionneur achète des tablettes jusqu'à obtenir l'ensemble de la collection, c'est-à-dire pour chacun des n animaux au moins une vignette le représentant.
Soit $k \in [\![1;n]\!]$. On note T_k la variable aléatoire égale au nombre d'achats effectués par le collectionneur au moment où sa collection comporte pour la première fois k animaux différents, éventuellement avec des doublons.
On note Z_k le nombre d'achats effectués par le collectionneur entre le moment où sa collection comporte pour la première fois $k-1$ animaux différents et le moment où sa collection comporte pour la première fois k animaux différents.

1) En utilisant les notations précédentes, désigner la variable aléatoire qui modélise le nombre d'achats nécessaires pour obtenir l'ensemble de la collection.

2) Déterminer la loi de T_1.

3) **a)** On suppose que q est un entier supérieur ou égal à 2. Calculer la probabilité qu'un collectionneur obtienne toujours le même animal au cours de ses q premiers achats.

b) En déduire, pour tout $q \geqslant 1$,
$$\mathbb{P}(T_2 > q) = \frac{1}{n^{q-1}}.$$

c) En déduire la loi de T_2.

d) On suppose que la collection contient 100 animaux. Calculer le nombre minimal d'achats que le collectionneur doit effectuer pour que la probabilité d'obtenir deux animaux différents soit supérieure ou égale à 0,99 .

e) Pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$, justifier que
$$Z_k = \begin{cases} T_1 \text{ si } k = 1 \\ T_k - T_{k-1} \text{ si } k \geqslant 2 \end{cases}$$

f) En déduire, pour $k \geqslant 1$, une expression de T_k en fonction des Z_i.

g) Démontrer que Z_k suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance et la variance de Z_k.

h) En déduire que, pour $n \geqslant 1$,
$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} = nH_n$$

i) Donner un équivalent de $\mathbb{E}(T_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4) **a)** Montrer que les variables aléatoires $Z_k, 1 \leqslant k \leqslant n$, sont mutuellement indépendantes. Exprimer $\mathbb{V}(T_n)$ en fonction de n, B_n et H_n.

b) En déduire que $\mathbb{V}(T_n) \leqslant \dfrac{n^2\pi^2}{6}$.

5) Démontrer que, pour tout nombre réel $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geqslant \lambda n \ln n\right) \leqslant \frac{\pi^2}{6\lambda^2(\ln n)^2}.$$

6) Déterminer un entier n_0 tel que pour tout entier n supérieur ou égal à n_0,

$$\mathbb{P}\left(T_n \geqslant nH_n + n\ln n\right) \leqslant 0,01.$$

Exercice 2 (type Mines – Nombre de sites visités par une marche aléatoire)

Dans tout le texte, d est un élément de $\mathbb{N}^*$. On note 0_d le d-uplet dont toutes les coordonnées valent 0, c'est à dire le vecteur nul de $\mathbb{R}^d$.

On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune la loi de X et définies sur un même espace probabilisé. La suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\,\mathbb{N}}$ est définie par $S_0 = 0_d$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

La suite $(S_n)_{n\in\,\mathbb{N}}$ est une *marche aléatoire de pas* X, à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$.

On note R la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ définie par

$$R = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 0_d\} & \text{si } \{n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = 0_d\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit, R est égal à $+\infty$ si la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne revient jamais en 0_d, au premier instant auquel cette marche aléatoire revient en 0_d sinon.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit N_n le cardinal du sous-ensemble

$$\{S_k,\ k \in \{0, \ldots, n\}\}$$

de $\mathbb{Z}^d$. Le nombre N_n est donc le nombre de points de $\mathbb{Z}^d$ visités par la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ après n pas.

Le but du problème est d'étudier asymptotiquement l'espérance $\mathrm{E}(N_n)$ de la variable aléatoire N_n.

On considère les fonctions F et G définies par les formules

$$\forall x \in]-1, 1[\,,\ F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = 0_d)x^n$$

$$\forall x \in]-1, 1[\,,\ G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(R = n)x^n$$

1) Montrer que les séries entières définissant F et G ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Justifier alors que les fonctions F et G sont définies et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.
Montrer que G est définie et continue sur $[-1, 1]$ et que

$$G(1) = P(R \neq +\infty)$$

2) Si k et n sont des entiers naturels tels que $k \leqslant n$, montrer que

$$P((S_n = 0_d) \cap (R = k)) = P(R = k)P(S_{n-k} = 0_d)$$

En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(S_n = 0_d) = \sum_{k=1}^{n} P(R = k)P(S_{n-k} = 0_d)$$

3) Montrer que

$$\forall x \in \,]-1, 1[\,,\ F(x) = 1 + F(x)G(x)$$

Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque $x \to 1^-$, en discutant selon la valeur de $P(R \neq +\infty)$.

4) Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telle que la série entière $\sum c_k x^k$ ait un rayon de convergence 1 et que la série $\sum c_k$ diverge. Montrer que

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = +\infty$$

L'élément A de $\mathbb{R}^{+*}$ étant fixé, on montrera qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que

$$\forall x \in]1-\alpha, 1[,\ \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k > A$$

5) Montrer que la série $\sum P(S_n = 0_d)$ est divergente si et seulement si $P(R \neq +\infty) = 1$.

6) Pour $i \in \mathbb{N}^*$, soit Y_i la variable de Bernoulli indicatrice de l'événement

$$(S_i \notin \{S_k,\ 0 \leqslant k \leqslant i-1\})$$

Montrer que, pour $i \in \mathbb{N}^*$:

$$P(Y_i = 1) = P(R > i)$$

En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{E}(N_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} P(R > i)$$

7) Conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{E}(N_n)}{n} = P(R = +\infty)$$

On pourra admettre et utiliser le théorème de Cesàro : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle convergeant vers le nombre réel ℓ, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k = \ell$$