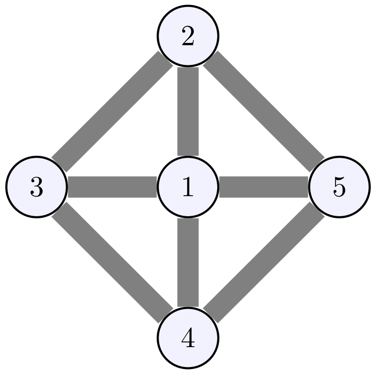


Devoir de Mathématiques numéro 5

Exercice 1

Un labyrinthe est constitué de cinq salles, numérotées de 1 à 5, qui communiquent par des tubes selon le schéma ci-dessous :



Un rat se déplace dans ce labyrinthe, et on relève sa position en des instants numérotés $0, 1, 2, \dots, k, \dots$ ($k \in \mathbb{N}$). On admet que, si le rat se trouve à l'instant k ($k \in \mathbb{N}$) dans la salle numéro i ($1 \leqslant i \leqslant 5$), alors il empruntera aléatoirement l'un des tubes de la salle i et se trouvera donc, à l'instant $k+1$, avec équiprobabilité, dans l'une quelconque des salles communiquant avec la salle i. On admet que l'on peut introduire, pour tout k entier naturel, une variable aléatoire S_k donnant le numéro de la salle où se trouve le rat à l'instant k. À titre d'exemple, on aura donc

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(S_{k+1} = 1 | S_k = 2) = \mathbb{P}(S_{k+1} = 3 | S_k = 2) = \mathbb{P}(S_{k+1} = 5 | S_k = 2) = \frac{1}{3}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on introduit la matrice-colonne $X_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(S_k = 1) \\ \mathbb{P}(S_k = 2) \\ \mathbb{P}(S_k = 3) \\ \mathbb{P}(S_k = 4) \\ \mathbb{P}(S_k = 5) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$.

Pour une matrice B, ${}^tB$ représente sa matrice transposée.

1) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $\mathbb{P}(S_{k+1} = 1)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des $(\mathbb{P}(S_k = i),\ i = 1, \dots, 5)$.

2) Expliciter la matrice carrée $B \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $X_{k+1} = BX_k$ pour tout k entier naturel.

3) En observant les colonnes de la matrice B, montrer que le réel 1 est valeur propre de ${}^tB$ et expliciter un vecteur propre associé.

On suppose que la loi de la variable S_0 est donnée par $X_0 = {}^t\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$.

4) Montrer qu'alors les variables aléatoires S_k ont toutes la même loi.

5) Est-ce que S_0 et S_1 sont indépendantes ?

Exercice 2

On dispose d'une pièce qui, lorsqu'elle est lancée, tombe sur « pile » (P) avec la probabilité p et tombe sur « face » (F) avec la probabilité $q = 1 - p$. On suppose que p est dans $]0, 1[$.

Deux joueurs, Auguste et Bérengère, s'affrontent dans une suite de lancers de pièce.
Chacun d'eux choisit un motif formé d'une suite de trois piles ou faces avant le début de la partie.

- Auguste parie sur le motif PPF (pile, pile, face),
- Bérengère parie sur le motif FPP (face, pile, pile),

Puis la pièce est lancée plusieurs fois de suite jusqu'à ce qu'un des deux motif apparaisse, désignant le gagnant.
La probabilité d'un évènement A lié à ce jeu sera noté $\mathbb{P}(A)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note X_n la variable aléatoire qui donne la valeur du n-ième lancer : la variable X_n prend la valeur P lorsque la pièce tombe sur « pile » et la valeur F lorsque la pièce tombe sur « face ». Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_n = P) = p \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X_n = F) = q$$

Les lancers sont supposés indépendants, donc les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendantes.

Partie 1 (Le match nul)
Le but de cette partie est d'étudier l'évènement

H : « Personne ne gagne la partie »

Ce qui signifie que ni « PPF » ni « FPP » n'est apparu.
Pour simplifier, on groupe les suites de lancers en paquets de 3, en commençant au premier lancer :

« PFPFFFPFPFFPFFPFFPPPP... » sera découpé en « |PFP|FFF|PFP|FFP|FFP|FFP|PPP|... »

On ne considère que les motifs « $X_{3n+1}X_{3n+2}X_{3n+3}$ ». Ainsi le « FPP » qui apparaît vers la fin de la chaîne n'est pas détecté, car découpé sur 2 paquets.
Soit T la variable aléatoire discrète donnant le numéro du premier em paquet égal à « FPP ».
Si $\omega = PFPPFFFPP...$, le lancer se découpe en « |PFP|PFF|FPP|... » donc $T(\omega) = 3$.
La première apparition du motif « FPP » n'est pas détecté car découpée sur 2 paquets.
Si le motif « FPP » n'apparaît dans aucun paquet, $T = +\infty$.

1) Étude de la variable aléatoire discrète T.
   - **a)** Donner $T(\Omega)$.
   - **b)** Décrire l'évènement $(T = 1)$ à l'aide des $(X_k)_k$, puis en déduire sa probabilité.
   - **c)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner les valeurs de $\mathbb{P}(T = n)$.
   - **d)** En déduire $\mathbb{P}(T = +\infty)$.
   - **e)** Quelle loi classique suit T ? En déduire $E(T)$.

2) Montrer que $H \subset (T = +\infty)$.

3) En déduire $\mathbb{P}(H)$: le jeu se termine-t-il ?

Le raisonnement peut être reproduit pour tout motif arbitraire de longueur $m \in \mathbb{N}^*$. C'est ce qu'on appelle le paradoxe du singe.

Partie 2 (Premier motif apparu)
Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Notons les évènements suivants :

- E_n : « le jeu n'est pas terminé après n lancers ».
- A_n : « le n-ième lancer fait gagner Auguste », c'est-à-dire PPF vient d'apparaître pour la première fois (et FPP n'est pas apparu).
- B_n : « le n-ième lancer fait gagner Bérengère ». c'est-à-dire FPP vient d'apparaître pour la première fois (et PPF n'est pas apparu).

1) Au bout de $n = 1$ ou 2 lancers, l'un des joueur peut-il avoir gagné la partie ?
En déduire les valeurs de $\mathbb{P}(E_n)$, $\mathbb{P}(A_n)$, $\mathbb{P}(B_n)$ pour $n = 1$ et 2.

2) Cas $n = 3$. Dans cette question, on effectue 3 lancers seulement.
   - **a)** Décrire l'apparition du motif « PPF » à l'aide de X_1, X_2 et X_3.
   - **b)** En déduire la valeur de $\mathbb{P}(A_3)$.
   - **c)** De même, déterminer la valeur de $\mathbb{P}(B_3)$, puis celle de $\mathbb{P}(E_3)$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant 3$.

a) On considère une suite de n lancers consécutifs telle qu'Auguste gagne la partie au n-ième lancer. Expliquer pourquoi, lors des $n-1$ premiers lancers, la pièce n'est jamais tombée sur « face ».

b) En déduire la probabilité $\mathbb{P}(A_n)$ qu'Auguste gagne la partie au n-ième lancer.

4) On note G_A : « Auguste a gagné » et G_B : « Bérengère a gagné ».

a) Exprimer G_A à l'aide des $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) En déduire la probabilité $\mathbb{P}(G_A)$ qu'Auguste gagne la partie.

c) Quelle est la probabilité $\mathbb{P}(G_B)$ que Bérengère gagne la partie ? Indication : *On pourra utiliser l'évènement H.*

d) Quelles valeurs obtient-on pour ces deux probabilités lorsque la pièce est équilibrée ?

e) Quelle valeur donner à p pour que le jeu soit équitable ?

Partie 3 (Temps moyen d'attente)

Dans cette partie du problème on cherche à mesurer le nombre moyen de lancers qu'il faut effectuer pour obtenir le motif PPF du joueur A pour la première fois.
Soit T_A la variable aléatoire qui mesure la première apparition du motif PPF, c'est-à-dire que $T_A = n$ lorsque le motif d'Auguste apparaît à la n-ième étape, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
Contrairement à la partie 2, Bérengère ne joue plus, donc $(T_A = n)$ n'est pas égal à A_n :
Si $\omega = FPFPFFFPPPPPF$, alors $T_A(\omega) = 13$ alors qu'à la partie précédente Bérengère aurait gagné au 11e lancer (B_{11}).

1) Si le motif n'apparaît jamais, T_A prend la valeur $+\infty$. Expliquer pourquoi $(T_A = +\infty)$ est de probabilité nulle. Cet évènement sera donc ignoré.

2) Déterminer $T_A(\Omega)$, $\mathbb{P}(T_A = 1)$, $\mathbb{P}(T_A = 2)$ et $\mathbb{P}(T_A = 3)$.

3) Notons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \begin{cases} u_n = \mathbb{P}\Big(T_A > n\Big) \\ v_n = \mathbb{P}\Big((T_A > n) \cap (X_n = F)\Big) \\ w_n = \mathbb{P}\Big((T_A > n) \cap (X_n = P)\Big) \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer u_n en fonction de v_n et w_n.

4) Exprimer u_n pour $n \in [\![1, 5]\!]$ en fonction de p et q.

5) Exprimer v_1, v_2, w_1 et w_2 en fonction de p et q.

6) Soit $n > 3$.

a) Pour $k > n-3$, justifier que les évènements $(T_A > n-3)$, $(X_k = P)$ et $(X_k = F)$ sont indépendants.

b) En décomposant l'évènement $(T_A > n) \cap (X_n = F)$ selon la valeur prise par X_{n-1}, démontrer que

$$v_n = qv_{n-1} + pqv_{n-2}$$

c) En décomposant l'évènement $(T_A > n) \cap (X_n = P)$ selon la valeur prise par X_{n-1}, démontrer que

$$w_n = pw_{n-1} + pv_{n-1}$$

7) En déduire la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geqslant 4, \qquad u_n = u_{n-1} - p^2 q u_{n-3}$$

8) Étude de la suite (u_n).

a) Exprimer la matrice compagnon A associé à la suite (u_n).

b) Donner l'équation caractéristique associée. On vérifiera que $x = p$ est une racine évidente. On notera x_1 et x_2 les deux autres racines, que l'on exprimera en fonction de p et q uniquement dans cette question.

c) Déterminer les valeurs propres de A, en déduire une expression de (u_n) en fonction de n, quitte à exclure certaines valeurs de p plus délicates.

9) Dans cette question, on admet que la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(T_A \geqslant n)$ est équivalente à celle de la série $\sum_{n\geqslant 0} n\mathbb{P}(T_A = n)$. Montrer que T_A admet une espérance, et la calculer.

10) Désormais, pour le reste de cette partie, $p = q = \dfrac{1}{2}$. Déterminer la loi de T_A et $E(T_A)$.

11) Le résultat obtenu est-il cohérent avec celui de la partie 1 ?

12) Déterminer, en suivant une méthode analogue, la loi du temps d'attente T_B du motif FPP. Montrez par le calcul que $E(T_B) = E(T_A)$, commentez.

Partie 4 (Pierre-papier-ciseaux)

Le but de cette partie est de comparer, dans le cas où $p = q = \dfrac{1}{2}$, quatre motifs aux temps d'attentes similaires :

PPF, FPP, FFP, PFF

Nous allons montrer que, si Auguste choisit en premier un motif, Bérengère peut toujours choisir un motif qui lui donne un avantage décisif.

1) Cas FFP contre PFF : dans cette question, Auguste choisit FFP et Bérengère PFF.
En posant $P' = F$ et $F' = P$, montrer que l'on peut déduire d'une question qui précède les probabilités $\mathbb{P}(G_A)$ et $\mathbb{P}(G_B)$.

2) Cas PFF contre PPF : dans cette question, Auguste choisit PFF et Bérengère PPF. En utilisant le système complet d'événements donné par le couple (X_1, X_2), Déterminez $\mathbb{P}(G_A)$ et $\mathbb{P}(G_B)$.

3) Étudiez le cas FPP contre FFP.