Devoir de Mathématiques numéro 5

Correction

Exercice 1

1) Remarquons que $F = \text{Ker Tr}$.
L'application linéaire $\text{Tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est non nulle donc $\text{rg Tr} = \dim \text{Im Tr} > 0$.
Or $\text{Im Tr} \subset \mathbb{R}$ et $\dim \mathbb{R} = 1$. Donc $\text{rg Tr} = 1$.
D'après le théorème du rang, $\dim F = \dim \text{Ker Tr} = \dim E - 1$.
Comme

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E$$

Ainsi, $\dim F^\perp = \dim E - \dim F = 1$.
De plus, $I_n \in F^\perp$:

$$\forall M \in F, \qquad (I_n|M) = \text{Tr}\,(I_n^T M) = \text{Tr}\,(M) = 0$$

Comme $I_n \neq 0$, (I_n) est une famille libre donc une base de F. Il suffit de normer pour obtenir une base orthonormée :

$$\|I_n\|^2 = (I_n|I_n) = \text{Tr}\,(I_n) = n$$

En conclusion

$$\boxed{(\frac{1}{\sqrt{n}} I_n) \text{ est une base orthonormée de } F^\perp, \text{ et } \dim F^\perp = 1}$$

2) D'après le cours, si F est un sous-espace vectoriel de E de base orthonormée $(e_1, \ldots, e_k)$, alors la projection orthogonale p_F sur F s'écrit

$$\forall x \in E, \qquad p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Ainsi la projection orthogonale $p_{F^\perp}$ sur $F^\perp$ s'écrit, avec la base orthonormée trouvée en 1,

$$\forall M \in E, \qquad p_{F^\perp}(M) = \langle M, \frac{1}{\sqrt{n}} I_n \rangle \frac{1}{\sqrt{n}} I_n = \frac{\text{Tr } M}{n} I_n$$

Il vaut mieux projeter sur $F^\perp$, vu sa dimension ! Puis considérer $\text{id} - p$ pour retrouver la projection cherchée.
Comme $F \oplus_\perp F^\perp = E$, $p_F = \text{id}_E - p_{F^\perp}$ et

$$\boxed{\forall M \in E, \quad p_F(M) = M - \frac{\text{Tr } M}{n} I_n}$$

3) D'après le cours, $d(J, F) = \|J - p_F(J)\|$. Or, comme $\text{Tr } J = n$,

$$J - p_F(J) = J - (J - \frac{\text{Tr } J}{n} I_n) = I_n$$

Ainsi,

$$\boxed{d(J, F) = \|I_n\| = \sqrt{n}}$$

Exercice 2 (Polynômes de Legendre)

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ impair, $t \mapsto t^n$ est impaire, donc

$$\int_{-1}^{1} t^n \,\mathrm{d}t = 0$$

Pour $n = 2k \in \mathbb{N}$ pair, $t \mapsto t^{2k}$ est paire, donc

$$\int_{-1}^{1} t^{2k} \,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{1} t^{2k} \,\mathrm{d}t = \frac{2}{2k+1}[t^{2k+1}]_0^1 = \frac{2}{2k+1}$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_{-1}^{1} t^{2k+1} \,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} t^{2k} \,\mathrm{d}t = \frac{2}{2k+1}}$$

2) Montrons que $(.|.)$ est un produit scalaire.

- Symétrique : Pour tout $(P,Q) \in E^2$,

$$(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t) \,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} Q(t)P(t) \,\mathrm{d}t = (Q|P)$$

  Donc $(.|.)$ est symétrique.
- Bilinéaire : Soit $Q \in E$ fixé. Pour tout $(P_1, P_2) \in E^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de l'intégrale,

$$(\lambda P_1 + P_2|Q) = \int_{-1}^{1} \Big(\lambda P_1(t) + P_2(t)\Big)Q(t) \,\mathrm{d}t = \lambda(P_1|Q) + (P_2|Q)$$

  Donc $(.|Q)$ est linéaire. Par symétrie, $(.|.)$ est bilinéaire.
- Positive : Pour tout $P \in E$, par positivité de l'intégrale,

$$(P|P) = \int_{-1}^{1} \underbrace{(P(t))^2}_{\geqslant 0} \,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

  Donc $(.|.)$ est positive.
- Définie positive : Soit $P \in E$ tel que

$$(P|P) = \int_{-1}^{1} (P(t))^2 \,\mathrm{d}t = 0$$

  Ainsi, $t \mapsto (P(t))^2$ est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur l'intervalle $[-1,1]$, donc, d'après le théorème du cours, elle est nulle sur cet intervalle :

$$\forall t \in [-1,1], \qquad (P(t))^2 = 0$$

  Donc P a un infinité de racines : tous les $t \in [-1,1]$.
  Donc $P = 0$.
  Ainsi, $(.|.)$ est définie positive.

Conclusion :

$$\boxed{(.|.) \text{ est bilinéaire, symétrique, définie positive donc c'est un produit scalaire sur } E.}$$

3) Application.

a) Utilisons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

- Posons $v_0 = 1$.

- Posons $v_1 = X - \lambda v_0$ tel que $(v_1|v_0) = 0$. Or d'après la question 1,

$$(v_1|v_0) = \int_{-1}^{1} t \,\mathrm{d}t = 0$$

Donc $v_1 = X$;

- Posons $v_2 = X^2 - \lambda_0 v_0 - \lambda_1 v_1$ tel que $(v_2|v_i) = 0$ pour tout $i < 2$:

$$\begin{aligned}(v_2|v_0) &= (X^2|v_0) - \lambda_0(v_0|v_0) - \lambda_1(v_1|v_0) \\ &= (X^2|v_0) - \lambda_0(v_0|v_0) && \text{Car } v_1 \perp v_0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $\lambda_0 = \dfrac{(X^2|v_0)}{(v_0|v_0)}$. Et, de même, $\lambda_1 = \dfrac{(X^2|v_1)}{(v_1|v_1)}$.
Or, d'après la question 1,

$$\left.\begin{aligned}(X^2|v_0) &= \int_{-1}^{1} t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{2}{3} \\ (v_0|v_0) &= \int_{-1}^{1} 1 \,\mathrm{d}t = 2\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \lambda_0 = \frac{(X^2|v_0)}{(v_0|v_0)} = \frac{1}{3}$$

$$(X^2|v_1) = \int_{-1}^{1} t^3 \,\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow \lambda_0 = 0$$

Donc $v_2 = X^2 - \dfrac{1}{3}$

Normons la famille orthogonale (v_0, v_1, v_2) :

$$\begin{aligned}\|v_0\|^2 &= (v_0|v_0) = 2 \\ \|v_1\|^2 &= (v_1|v_1) = \int_{-1}^{1} t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{2}{3} \\ \|v_2\|^2 &= \|X^2 - \frac{1}{3}\|^2 \\ &= (X^2|X^2) - \frac{2}{3}(X^2|1) + \frac{1}{9}\|1\|^2 \\ &= \int_{-1}^{1} t^4 \,\mathrm{d}t - \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{9} && \text{D'après les calculs effectués ci-dessus} \\ &= \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{45} = \frac{2^3}{3^2 \times 5}\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathscr{B}' = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}X, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3X^2 - 1)\right)}$$

b) D'après le cours, si F est un sous-espace vectoriel de E de base orthonormée $(e_1, \ldots, e_k)$, alors la projection orthogonale p_F sur F s'écrit

$$\forall x \in E, \qquad p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} (x|e_i)e_i$$

Ici, on peut aussi dire « Comme à la question 2 de l'exercice 1, » et passer à ce qui suit.

Avec la base $\mathscr{B}'$ de $F = \mathbb{R}_2[X]$, il vient, $\forall P \in E$,

$$\begin{aligned}p_F(P) &= \sum_{i=0}^{2} (P|e'_i)e'_i \\ &= \frac{1}{2}(P|1)1 + \frac{3}{2}(P|X)X + \frac{5}{8}(P|3X^2 - 1).(3X^2 - 1)\end{aligned}$$

Pour $P = X^3$, il faut donc calculer :

$$\begin{aligned}
(X^3|1) &= \int_{-1}^{1} t^3 \,\mathrm{d}t = 0 && \text{D'après la question 1}\\
(X^3|X) &= \int_{-1}^{1} t^4 \,\mathrm{d}t = \frac{2}{5} && \text{Déjà calculé}\\
(X^3|X^2) &= \int_{-1}^{1} t^5 \,\mathrm{d}t = 0 && \text{D'après la question 1}\\
(X^3|3X^2-1) &= 3(X^3|X^2) - (X^3|1) = 0
\end{aligned}$$

Par conséquent, la projection de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$\boxed{p_F(X^3) = \frac{3}{5}X}$$

Vu que l'intervalle d'intégration est centré en 0, dès que $t \mapsto P(t)Q(t)$ est impaire l'intégrale est nulle. Donc ici, dès que P n'a que des monomes de puissance impaire, et Q des monomes de puissance paire (ou vis versa), alors $(P|Q) = 0$, i.e. $P \perp Q$.

c) Interprétons algébriquement cette expression :

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 \,\mathrm{d}t = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \|X^3 - aX^2 - bX - c\|^2$$

Or $P = aX^2 + bX + c$ décrit $\mathbb{R}_2[X]$ lorsque (a, b, c) décrivent $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 \,\mathrm{d}t &= \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \|X^3 - aX^2 - bX - c\|^2\\
&= \inf_{P\in\mathbb{R}_2[X]} \|X^3 - P\|^2\\
&= d(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2 && \text{Par défintion de la distance}\\
&= \|X^3 - p_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)\|^2\\
&= \|X^3 - \frac{3}{5}X\|^2 && \text{D'après la question précédente}\\
&= \|X^3\|^2 - \frac{6}{5}(X^3|X) + \frac{3^2}{5^2}\|X\|^2
\end{aligned}$$

Or

$$\|X^3\|^2 = \int_{-1}^{1} t^6 \,\mathrm{d}t = \frac{2}{7}, \qquad (X^3|X) = \int_{-1}^{1} t^4 \,\mathrm{d}t = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad \|X\|^2 = \frac{2}{3}$$

Donc $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2 = \frac{2}{7} - \frac{12}{25} + \frac{6}{25} = \frac{2}{7} - \frac{6}{25} = 2\frac{25-21}{7\times 5^2} = \frac{2^3}{7\times 5^2}$. Conclusion :

$$\boxed{\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} (t^3 - at^2 - bt - c)^2 \,\mathrm{d}t = \frac{2^3}{7\times 5^2}}$$

4) **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. $\mathscr{B}_n = (P_0, \ldots, P_n)$ est une famille libre de $n+1$ éléments dans l'espace $R_n[X]$ de dimension $n+1$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Dans la base $\mathscr{B}_n$ il s'écrit

$$P = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i$$

Il faut toujours choisir la bonne base — après avoir montré que c'est une base.

Ainsi,

$$\begin{aligned}(P|P_{n+1}) &= (\sum_{i=0}^{n}\lambda_i P_i|P_{n+1})\\ &= \sum_{i=0}^{n}\lambda_i(P_i|P_{n+1}) && \text{Or } P_i \perp P_{n+1} \text{ si } i \neq n+1\\ &= 0\end{aligned}$$

Par conséquent, $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $(P|P_{n+1}) = 0$. Conclusion,

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_n[X]}$$

b) Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les racines dans $]-1,1[$ de P_n, comptées avec multiplicité. Alors

$$P_n = R\prod_{i=1}^{m}(X-\lambda_i)$$

Avec $R \in \mathbb{R}_n[X]$ qui ne s'annule pas sur $]-1,1[$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, R ne change pas de signe sur $]-1,1[$. Supposons $R(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [-1,1]$.

Posons $Q = \prod_{i=1}^{m}(X-\lambda_i) \in R_n[X]$. Il vient $P_n = RQ$ et

$$(P_n|Q) = \int_{-1}^{1} R(t)Q(t)^2\,\mathrm{d}t$$

avec $R(t)Q^2(t) \geqslant 0$ sur cet intervalle.
Si $\deg Q < \deg P_n$, d'après le a, $(P_n|Q) = 0$.
Ainsi, $t \mapsto R(t)(Q(t))^2$ est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur l'intervalle $[-1,1]$, donc, d'après le théorème du cours, elle est nulle sur cet intervalle.
Le polynôme RQ^2 a une infinité de racines, donc est identiquement nul, et $P_n = RQ = 0$ aussi. Ce qui est absurde.
Par conséquent, $\deg Q = \deg P_n$ et R est une constante : toutes les racines de P_n sont dans $]-1,1[$.
Si $R(t) \leqslant 0$ sur $[-1,1]$, on considère $(-P_n|Q)$ et $-R$.
Conclusion :

$$\boxed{\text{Toutes les racines de } P_n \text{ sont réelles et dans }]-1,1[}$$

c) Si λ est une racine double de P_n, on pose $P_n = (X-\lambda)^2 Q$, avec $\deg Q = \deg P_n - 2 < \deg P_n$. Alors

$$(P_n|Q) = \int_{-1}^{1}(t-\lambda)^2 Q(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$$

Et donc, de meme qu'à la question précédente, $P_n = 0$, ce qui est absurde. Conclusion :

$$\boxed{\text{Les racines de } P_n \text{ sont simples}}$$

Exercice 3 (exercice 13)

1) Procédons par inclusion et égalité des dimensions *(nous sommes en dimension finie !)* :

- Montrons que $\mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Im}\,(f-\mathrm{id}_E)^{\perp}$.

$$\begin{aligned}x \in \mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{id}_E) &\Longrightarrow (f-\mathrm{id}_E)(x) = f(x)-x = 0 && ①\\ &\Longrightarrow \forall y' \in E,\ \langle x, f(y')-y'\rangle = \langle x, f(y')\rangle - \langle x, y'\rangle && ④\\ &\qquad = \langle x, f(y')\rangle - \langle f(x), f(y')\rangle && \text{Car } f \in \mathscr{O}(E) \quad (*)\\ &\qquad = \langle x - f(x), f(y')\rangle\\ &\qquad = \langle 0, f(y')\rangle && \text{Car } x \in \mathrm{Ker}\,(f-\mathrm{id}_E)\\ &\qquad = 0\\ &\Longrightarrow \forall y' \in E, \quad \langle x, f(y')-y'\rangle = 0 && ③\\ &\Longrightarrow \forall y \in \mathrm{Im}\,(f-\mathrm{id}_E), \quad \langle x, y\rangle = 0 && ②\\ &\Longrightarrow x \in \mathrm{Im}\,(f-\mathrm{id}_E)^{\perp} && ①\end{aligned}$$

(*) On a du x et du y', on veut plutôt du $f(y')$ et on a rien contre $f(x)$: utilisons $f \in \mathscr{O}(E)$, on verra bien ce que ça donne : il faut l'écrire !

Donc
$$\operatorname{Ker}(f - \operatorname{id}_E) \subset \operatorname{Im}(f - \operatorname{id}_E)^{\perp}$$

On pouvait aussi montrer l'autre inclusion.

- Montrons que $\dim \operatorname{Ker}(f - \operatorname{id}_E) = \dim \operatorname{Im}(f - \operatorname{id}_E)^{\perp}$.
  D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker}(f - \operatorname{id}_E) + \dim \operatorname{Im}(f - \operatorname{id}_E) = \dim E$.
  De plus, $\dim F^{\perp} + \dim F = \dim E$, donc ici $\dim \operatorname{Im}(f - \operatorname{id}_E)^{\perp} + \dim \operatorname{Im}(f - \operatorname{id}_E) = \dim E$.
  Par conséquent
  $$\dim \operatorname{Ker}(f - \operatorname{id}_E) = \dim \operatorname{Im}(f - \operatorname{id}_E)^{\perp}$$

Conclusion : par inclusion et égalité des dimensions,

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f - \operatorname{id}_E) = \operatorname{Im}(f - \operatorname{id}_E)^{\perp}}$$

2) Posons $F = \operatorname{Im}(f - \operatorname{id}_E)$.
Supposons que $(f - \operatorname{id}_E)^2 = 0$. Par conséquent, $F = \operatorname{Im}(f - \operatorname{id}_E) \subset \operatorname{Ker}(f - \operatorname{id}_E)$.
Or $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{id}_E) = F^{\perp}$ d'après la question 1.
Donc $F \subset F^{\perp}$: $F = F \cap F^{\perp}$. Or $F \cap F^{\perp} = \{0\}$. Donc $F = \operatorname{Im}(f - \operatorname{id}_E) = \{0\}$. Conclusion :

$$\boxed{f = \operatorname{id}_E}$$